МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АВИАЦИОННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математики

**АННОТАЦИЯ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

«*ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ*»

Уровень подготовки
высшее образование – бакалавриат

Направление подготовки (специальность)
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность подготовки (профиль, специализация)
Математическое моделирование и вычислительная математика

Квалификация (степень) выпускника
бакалавр

Форма обучения
очная

Исполнитель Водопьянов В.В.

Заведующий кафедрой математики Байков В.А.

Уфа 2015

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Функциональный анализ» является дисциплиной базовой части.

Рабочая программа составлена в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 12.03.2015 г. № 228.

Целью освоения дисциплины является изучение методов, задач и теорем функционального анализа, их применение к решению задач прикладной математики. Основу данного курса составляют теория меры Лебега, измеримых функций, интеграла Лебега, топологических и нормированных пространств, линейных операторов и их свойств.

Задачи:

- сформировать знания о теории меры Лебега, измеримых функций, интеграла Лебега, топологических и нормированных пространств, линейных операторов и их свойств;
- изучить основные утверждения и теоремы из теории меры Лебега, измеримых функций, интеграла Лебега, топологических и нормированных пространств, линейных операторов и их свойств;
- изучить способы использования методов теории меры Лебега, измеримых функций, интеграла Лебега, топологических и нормированных пространств, линейных операторов и их свойств.

Перечень результатов обучения

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций.

Планируемые результаты обучения по дисциплине

№	Формируемые компетенции	Код	Знать	Уметь	Владеть
1	Способность использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой	ОПК-1	- основные методы функционального анализа и их применение на практике; - теоретические положения и методы функционального анализа, используемые при решении конкретных прикладных задач.	- использовать методы функционального анализа в профессиональной деятельности; - определять возможности применения теоретических положений и методов функционального анализа для постановки и решения конкретных прикладных задач.	- навыками применения стандартных методов функционального анализа к решению прикладных задач.

Содержание разделов дисциплины

№	Наименование и содержание разделов
1	**Метрические пространства.** Метрическое пространство. Понятие сходимости в метрическом пространстве. Замыкание в метрическом пространстве. Примеры метрических пространств: евклидово пространство, пространство непрерывных функций C[0,1], пространство ограниченных последовательностей, пространство сходящихся последовательностей, пространство ограниченных измеримых функции, пространство всех последовательностей s, пространства L_p и l_p. Полные метрические пространства. Полнота пространств C[0,1], m. Пополнение метрического пространства. Критерий полноты с помощью системы вложенных шаров. Нигде не плотные множества. Множества 1 и 2 категории по Бэру. Теорема Бэра о полном метрическом пространстве. Принцип сжимающих отображений и его применение (теорема Пикара). Сепарабельные пространства и сепарабельность и несепарабельность конкретных пространств. Сепарабельность пространства C[0,1]. Понятие компактного множества в метрическом пространстве. Теорема Хаусдорфа о конечной ε-сети у компактного множества. Критерий компактности в терминах открытого покрытия. Теорема Асколи-Арцела (критерий компактности в C[0,1]). Критерий компактности в пространстве l_p.
2	**Нормированные пространства.** Нормированное пространство. Норма, сходящиеся последовательности и их свойства. Неравенства Гельдера и Минковского. Примеры нормированных пространств: l_p, m, L_p, C[0,1]. Эквивалентные нормы в нормированном пространстве. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. Лемма Рисса о почти перпендикуляре. Банаховы пространства. Ряды в нормированных пространствах и критерий полноты. Скалярное произведение, норма. Примеры пространств со скалярным произведением. Свойства скалярного произведения: непрерывность и равенство параллелограмма. Гильбертово пространство. Существование элемента наилучшего приближения выпуклым множеством и подпространством. Ортогональное дополнение. Ряд Фурье по ортогональной системе. Отрезок ряда Фурье и его свойства. Неравенство Бесселя и полнота ортогональной системы. Существование ортогонального базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Изоморфизм гильбертовых пространств.
3	**Теория меры и интеграл Лебега.** Множества и операции над ними. Полукольцо. Примеры полуколец. Кольцо. Кольцо, порождаемое системой множеств. Минимальное кольцо, порожденное полукольцом и его описание, σ-кольцо и σ-алгебра. Конечно аддитивная и σ-аддитивная мера. Простейшие свойства (конечная полуаддитивность, монотонность, счетная монотонность). Пример меры на прямой. Продолжение меры с полукольца на кольцо, сохранение счетной аддитивности при этом продолжении. Внешние меры Лебега. Алгебры измеримых по Лебегу множеств. Аддитивность внешней меры на измеримых множествах, σ-алгебра измеримых по Лебегу множеств, σ-аддитивность меры Лебега, σ-конечная и полная мера. Непрерывная мера, эквивалентность непрерывности и σ-аддитивности меры. Измеримая функция. Измеримость различных множеств, порождаемой измеримой функцией. Сохранение измеримости при арифметических операциях над измеримыми функциями. Измеримость точных граней последовательности измеримых функций и верхнего и нижнего пределов. Сходимость по мере. Единственность предела по мере. Арифметические свойства предела по мере. Суперпозиция непрерывной функции и предел по мере последовательности функций. Критерий сходимости по мере: фундаментальность по мере. Сходимость п.в. Неэквивалентность сходимости п.в. и по мере. Критерий сходимости п.в. на множествах конечной меры и вытекание сходимости по мере из сходимости п.в. Теорема Рисса (о существование подпоследовательности сходящейся п.в.). Простые функции. Равномерная аппроксимация простыми функциями. Определение интеграла Лебега для простых функций. Интеграл Лебега для неотрицательной и произвольной функции, совпадение на классе простых. Элементар-

	ные свойства интеграла Лебега: интегрируемость ограниченной, интегрируемость на нуль-множестве, п.в. конечность функции, оценка интеграла, аддитивность по множествам, интегрируемость модуля, обращение п.в. в нуль функции с равным нулю интегралом. Счетная аддитивность интеграла и абсолютная непрерывность. Переход к пределу под интегралом для монотонной неотрицательной последовательности функций (теорема Беппо-Леви). Линейность интеграла. Теорема Фату о предельном переходе. Теорема Лебега о мажорантной сходимости. Заряд. Положительные и отрицательные множества. Разложение Хана. Единственность разложения с точностью до нуль-множеств. Разложение Жордана. Абсолютно непрерывная мера. Теорема Радона-Никодима. Произведение мер. σ-аддитивность произведения мер. Теоремы Фуббини для срезок и в общем случае.
4	**Линейные операторы и функционалы.** Линейные операторы. Достаточность непрерывности в точке для непрерывности всюду для линейного оператора. Ограниченность и непрерывность. Норма линейного оператора. Пространство линейных ограниченных операторов и его полнота. Равномерная и сильная сходимость в этом пространстве. Принцип равномерной ограниченности и теорема Банаха-Штейнгауса. Продолжение линейного оператора с подпространства на более широкое пространство по непрерывности. Обратный оператор и ядро оператора. Непрерывная обратимость. Обратимость операторов I-A. График оператора. Замкнутый оператор. Критерий замкнутости. Замкнутость непрерывного оператора. Теорема Банаха о замкнутом графике. Теорема Хана-Банаха. Следствия из теоремы Хана-Банаха. Сопряженное пространство. Норма в сопряженном пространстве. Понятие рефлексивности. Пространство, сопряженное к пространству c_0, 1_p. Пространство, сопряженное в пространству L_p. Теорема Рисса-Фишера об общем виде линейного функционала над гильбертовым пространством. Сопряженный оператор. Условия существования сопряженного оператора. Сопряженный оператор к ограниченному оператору и его норма. Самосопряженный оператор. Вполне непрерывные операторы и замкнутость их подпространства. Теорема Шаудера о полной непрерывности сопряженного оператора.

Подробное содержание дисциплины, структура учебных занятий, трудоемкость изучения дисциплины, входные и исходящие компетенции, уровень освоения, определяемый этапом формирования компетенций, учебно-методическое, информационное, материально-техническое обеспечение учебного процесса изложены в рабочей программе дисциплины.