**На правах рукописи**

**ЗАЙНУЛЛИН Рифат Гильметдинович**

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ТЕПЛООБМЕНА СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

**Специальность 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ**

**АВТОРЕФЕРАТ**
**диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук**

**Уфа–2010**

Работа выполнена в ГОУ ВПО «Уфимском государственном авиационном техническом университете» на кафедре математики

Научный руководитель: д-р физ.-мат. наук, проф.
**ЖИБЕР Анатолий Васильевич**
Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН

Официальные оппоненты: д-р физ.-мат. наук
**СУЛЕЙМАНОВ Булат Ирекович**
Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН

д-р техн. наук, проф.
**ЦИРЕЛЬМАН Наум Моисеевич**
кафедра авиационной теплотехники и теплоэнергетики ГОУ ВПО «Уфимского государственного авиационного технического университета»

Ведущая организация: **ГОУ ВПО «Самарский государственный университет»**

Защита диссертации состоится «28» декабря на заседании диссертационного совета Д 212.288.06 при ГОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» по адресу: 450000, г.Уфа, Республика Башкортостан, ул. К.Маркса, д.12, копр.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета.

Автореферат разослан «25» ноября 2010г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д-р физ.-мат. наук, проф. **БУЛГАКОВА Г.Т**

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность**. Краевые задачи для уравнений параболического типа в нецилиндрических областях являются предметом необозримого числа исследований, охватывая все новые содержательные математические объекты и все большее число самых разнообразных приложений. Наличие движущихся границ вносит серьёзные трудности в попытках получить аналитические решения такого рода задач, и поиск подходов для этих целей продолжается, и более того, находится в самом начале этого пути. В этом смысле тема диссертационного исследования является актуальной по существу.

Многие задачи теплообмена, широко используемые в гидромеханике, физике, технике, химической технологии и др. связаны с процессами затвердевания или плавления. Исследования таких задач принимают всё более неоценимое значение во многих отраслях народного хозяйства – машиностроительной, автомобильной, авиационной промышленности; в развитии сырьевой базы металлургической, топливной, химической промышленности; при сооружении гидроэлектростанции, метрополитенов, баз и хранилищ различного назначения. Проблема совершенствования технологических процессов в данных отраслях промышленности неизбежно приводит к задачам интенсификации процессов механической обработки материалов, а это требует выявления влияния режимных, технологических и конструктивных факторов на тепловое состояние изделий. Например, для повышение надежности и безопасности функционирования летательных аппаратов необходима информация о внутреннем температурном режиме вдоль всего ланжерона с учетом фазового переход, происходящего в период изготовления изделия, поэтому роль теоретических исследований в этой области очень велика.

Строительство многих подземных объектов осуществляется в сложных метеорологических и гидрогеологических условиях. Это связано с тем, что работы ведутся в водоносных грунтах в районах Крайнего Севера и Антарктиды, и проведения строительства осложняется процессами промерзания и оттаивания грунта. Успешное проведение этих работ невозможно без понимания Тепловы процессов, происходящих в зоне вечной мерзлоты. Поэтому задача построения температурных полей для таких процессов весьма актуальна и имеет большое практическое значение.

**Цель работы**. Целью диссертационной работы является построение и исследование математической модели, адекватно описывающей процессы нестационарного теплообмена с фазовым переходом.

Поставленная цель достигается в результате решения следующих задач:

1. Получение приближенно-аналитического решения изучаемых задач нестационарного теплообмена с фазовым переходом.

2. Доведение полученного приближенно-аналитического решения до компактных вычислительных формул с хорошо сходящимися рядами с помощью функциональных и рекуррентных соотношений и асимптотических представлений для вырожденных гипергеометрических функций.

3. Оценка сходимости алгоритма численного расчета.

**Научная новизна**.

1. Предложена новая математическая модель процесса нестационарного теплообмена с фазовым переходом со специальными начальными условиями в постановке задачи, обеспечивающими возможность применения интегральных преобразований.

2. Впервые получено приближенно-аналитическое решение одномерной и двухмерной задач Стефана в неавтомодельных постановках методом разложения по собственным функциям самосопряженного дифференциального оператора с доведением до числовых результатов для одномерной задачи.

3. Развита теория интегральных преобразований на основе вырожденных гипергеометрических функций.

**Теоретическая и практическая ценность.** Результаты работы представляют теоретический интерес для специалистов занимающихся в областях моделирования процессов, связанных с фазовыми переходами. Они могут быть использованы при решении соответствующих задач как аналитическими и численными методами.

Получены формулы вычисления нормирующих множителей исходя из свойств уравнения второго порядка.

Применение полученных результатов представляет значительный практический интерес. Например, задача об образовании льда имеет чрезвычайно большое значение как в геофизике, так и при производстве льда; в последнее время большое внимание уделяется вопросу затвердевания отливок; изучение охлаждения больших масс изверженных горных пород имеет большое значение в геологии и т.д.

**Достоверность** результатов диссертации обеспечивается обоснованностью математической модели процесса фазового перехода, вытекающей из общей теории математической физики и данных натурного эксперимента, применением аналитических методов, основанных на общей схеме метода разделения переменных и интегральных преобразований. Корректность численной схемы обусловлена проверкой её сходимости.

**Апробация работы и публикации.** Результаты работы опубликованы в 15 научных статьях (2 из них в изданиях, рекомендованном ВАК, 4 в материалах конференций). Вклад соавторов публикации равнозначен. Список публикации по теме диссертации приведен в конце автореферата. Основные результаты диссертационной работы представлены и обсуждались:

- на конференции молодых учёных БФАН СССР “Исследования по математике, физике, механике и процессам управления” (Уфа, 1987г.);

- на IV Уральской региональной конференции “Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения” (Уфа, 1989г.);
- на III Сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике (Новосибирск, 1998г.);
- на международной научной конференции “Моделирование, вычисление, проектирование в условиях неопределенности” (Уфа, 2000г.);
- на научно-практической конференции, посвящённой году здоровья и 70-летию БГМУ (Уфа, 2002г.);
- на международной математической конференции, посвященной памяти А.Ф. Леонтьева (Уфа, 2007г.);
- на международной научной конференции “Дифференциальные уравнения и сложные проблемы” (Стерлитамак, 2008г.);
- на III международной научной конференции “Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования” (Воронеж, 2009г.);
- на VI Всероссийской научной конференции с международным участием “Математическое моделирование и кривые задачи” (Самара, 2009г.);
- на II международной научной конференции “Математическое моделирование и дифференциальные уравнения” (Минск, 2009г.);
- на научных семинарах кафедры дифференциальных уравнений Уральского, Башкирского, Куйбышевского, Саратовского, Казанского, Московского госуниверситетов, института математики с ВЦ УНЦ РАН, Стерлитамакского филиала Уфимского БГПУ (1990-2000г.г.).

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Новая математическая модель процессов нестационарного теплообмена с фазовым переходом, описываемые уравнениями в частных производных параболического типа со специальными краевыми условиями, задаваемыми на свободных и фиксированных границах.
2. Приближенно-аналитическое решение одномерной и двухмерной задач нестационарного теплообмена с фазовыми переходами, основанное на методе разложения по собственным функциям самосопряжённого дифференциального оператора, выражающимися через вырожденные гипергеометрические функции.
3. Численная схема описания температурных полей и вычисления скорости движения свободной границы на основе приближённо-аналитического метода с использованием функциональных, рекуррентных и асимптотических соотношений для вырожденных гипергеометрических функций.
4. Асимптотические и численные методы нахождения спектральной функции, основанные на использовании специальных функций, параметры которых зависят от собственных чисел: это вырожденные гипергеометрические функции, функции параболического цилиндра и функции Эйри.

## Структура и основное содержание работы

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и библиографического списка, включающего 116 наименований. Информационная часть включает оглавление. Объем диссертации составляет 101 страницу.

**Введение** содержит краткий анализ структуры и содержания диссертационной работы, обоснование актуальности выбранного объекта исследования. Сформированы цели и задачи исследования, перечисляются результаты, выносимые на защиту, отмечается их научная новизна и практическая значимость, приводятся сведения об апробации работы и публикациях. Проводится анализ работ по теме исследования. Освещается состояние современной аналитической теории математической физики при решении краевых задач теплообмена в областях со свободными границами. Рассматриваются методы тепловых потенциалов, функций Грина, контурного интегрирования, обобщенных рядов, функциональных преобразований, дифференциальных рядов, автомодельных преобразований и др. Даётся обоснование метода, применяемого в данной работе.

Классические методы решения краевых задач для уравнения параболического типа в областях с криволинейными границами, изложенных в диссертации (§1-§7), обладают рядом недостатков: они требуют определенной изобретательности, дают решения малопригодные для числовых результатов, или же, в частности, могут дать неопределенность решения в начальный момент времени. Методы интегральных преобразований обладают рядом преимуществ перед классическими методами, они стандартны, позволяют получать решения в удобном для расчета виде (например, для малых и больших значений времени), использование таблиц изображений функций ускоряет и упрощает процесс нахождения решения. Наиболее удобным для задач теплообмена с фазовым переходом, как показывает анализ, служит метод конечных интегральных преобразований (в нашем случае он назван как метод разложения по собственным функциям самосопряженного дифференциального оператора), так как переход к оригиналам производится гораздо проще, чем в случае других интегральных преобразований, к тому же в данном случае не возникает необходимости построения функции Грина, что само по себе не просто. В то же время применение конечного интегрального преобразования позволяет привести краевую задачу к решению в изображениях линейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, решение которого элементарно.

Анализ работ по теме исследования показывает, что аналитическое решение задач нестационарного тепло- и массообмена при наличии движущихся границ в данных постановках удобнее всего получить методом, используемым в данной работе.

**В первой главе** изучается одномерная двухфазная задача Стефана с ограниченной областью теплового влияния. Обосновывается возможность разложения решения преобразованной задачи по собственным функциям самосопряженного дифференциального оператора и излагается получение аналитического решения изучаемой задачи через это разложение.

В **§1** формулируется постановка изучаемой задачи. Математическая модель процесса теплообмена для такой задачи имеет вид:

$$\frac{\partial t_k(x,\tau)}{\partial \tau} = a_k \frac{\partial^2 t_k(x,\tau)}{\partial x^2} \qquad ; \tag{1}$$

$$x \in D_k(\tau)\colon D_1(\tau) = \{0 < x < \xi_1(\tau)\}\ D_2(\tau) = \{\xi_1(\tau) < x < \xi_2(\tau)\}\ ;$$

$$\tau > 0, \quad \xi_1(+0) = \xi_0 > 0, \quad \xi_2(\tau) = a\xi_1(\tau), \quad a > 1;$$

$$t_1(x,0) = \left(1 - \frac{x}{\xi_0}\right) t_e, \quad t_2(x,0) = \frac{x - \xi_0}{(a-1)\xi_0} t_0\,; \tag{2}$$

$$t_1(0,\tau) = t_e, \quad t_k(\xi_1(\tau),\tau) = 0, \quad t_2(\xi_2(\tau),\tau) = t_0; \tag{3}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(\xi_1(\tau),\tau)}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial t_2(\xi_1(\tau),\tau)}{\partial x} = \sigma\nu \frac{d\xi_1(\tau)}{d\tau}\,. \tag{4}$$

Требуется найти функции $t_k(x,\tau)$ и $\xi_1(\tau)$, удовлетворяющие равенствам (1)-(4).

Условие $\xi_2(\tau) = a\xi_1(\tau)$, $a > 1$ принято на основании данных многократных наблюдений, проводимых в мерзлотной лаборатории Института мерзлотоведения АН СССР под руководством Н.А.Цитовича. Это объясняется тем, что среда обладает настолько большим тепловым сопротивлением, что влияние источника холода, имеющей конечную температуру, за конечный промежуток времени практически не может распространяться на бесконечно большое расстояние. В частности, из опыта замораживания грунтов установлено, что влияние температуры мерзлой части среды становится практически неуловимым на расстоянии равном 4,5-5,5 толщины промерзания. Точность определения $\xi_2(\tau)$ и $\xi_1(\tau)$ обусловлена точностью измерения температуры ($\pm 0{,}2\,°C$). Для проверки предположения о линейной зависимости между толщиной промерзания $\xi_1(\tau)$ и расстоянием влияния $\xi_2(\tau)$ источника холода в период 1938 –1950 г.г. были осуществлены натурные наблюдения и проведены специальные опыты. Из результатов наблюдений следует весьма важный вывод, заключающийся в том, что отношение расстояния влияния источника холода к толщине промерзания примерно одинаково и колеблется в небольших пределах (4,5-5,5).

В **§2** с помощью подстановок

$$x = y\xi_1(\tau)\ , \qquad T_k(y,\xi) = t_k(y\xi_1(\tau),\tau) - \begin{cases} (1-y)t_e & \text{при } k = 1; \\ \dfrac{y-1}{a-1} t_0 & \text{при } k = 2, \end{cases} \tag{5}$$

задача (1)-(3) сводится к решению уравнения

$$\xi^2(\tau)\frac{\partial T_k(y,\tau)}{\partial\tau}=a_k\frac{\partial^2 T_k(y,\tau)}{\partial y^2}+\xi_1(\tau)\xi_1'(\tau)y\frac{\partial T_k(y,\tau)}{\partial y}-\begin{cases} t_e\xi_1(\tau)\xi_1'(\tau)y & \text{при } k=1;\\ \dfrac{t_0}{1-a}\xi_1(\tau)\xi_1'(\tau)y & \text{при } k=2\end{cases} \qquad (6)$$

с однородными краевыми условиями

$$T_k(y,0)=0; \qquad (7)$$

$$T_1(0,\tau)=T_k(1,\tau)=T_2(a,\tau)=0\,. \qquad (8)$$

Решение задачи (6)-(8) отыскиваем, используя метод конечных интегральных преобразований по *y,* ядра которых являются решениями уравнений

$$a_k\frac{\partial^2[\rho_k(y)K_k(y,\tau)]}{\partial y^2}-\xi_1(\tau)\xi_1'(\tau)\frac{\partial[y\rho_k(y)K_k(y,\gamma)]}{\partial y}+\mu_{k,\gamma}^2\rho_k(y)K_k(y,\gamma)=0 \qquad (9)$$

при однородных граничных условиях

$$K_1(0,\gamma)=K_k(1,\gamma)=K_2(a,\gamma)=0\,. \qquad (10)$$

Полагая, что постулируемые ниже свойства интегрального преобразования имеют место, равномерно относительно τ. Для обеспечения условий, позволяющих получить разложение решения задачи (6)-(8) по собственным функциям $K_{k,\gamma}(y)$, соответствующим собственным значениям $\mu_{k,\gamma}^2$, на уравнение (9) накладывается требование самосопряженности, откуда определяется весовая функция

$$\rho_k(y)=\exp\left(\frac{\Lambda^2y^2}{4a_k}\right)=\exp\left(\beta_k y^2\right),\quad \beta_k=\frac{\Lambda^2}{4a_k}$$

с точностью до произвольного множителя и устанавливается закон движения свободной границы

$$\xi_1^2(\tau)=\int_0^\tau\Lambda^2 d\eta=\Lambda^2\tau+\xi_0^2\,,$$

постоянный параметр Λ подлежит определению через условие Стефана (4).

Уравнение (9) имеет следующий самосопряженный вид

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho_k(y)\frac{\partial K_{k,\gamma}(y)}{\partial y}\right]+\frac{\mu_{k,\gamma}^2}{a_k}\rho_k(y)K_{k,\gamma}(y)=0\qquad, \qquad (11)$$

которое приводится к виду

$$\frac{\partial^2 K_{k,\gamma}(y)}{\partial y^2}+2\,\beta_k y\frac{\partial K_{k,\gamma}(y)}{\partial y}+\frac{\mu_{k,\gamma}^2}{a_k}K_{k,\gamma}(y)=0. \qquad (12)$$

Подстановками

$$K_{k,\gamma}(y)=\frac{2\sqrt{a_k z}}{\Lambda}u_{k,\gamma}(z)\exp(-z),\qquad z=\frac{\Lambda^2y^2}{4a_k}=\beta_k y^2$$

уравнения (9) или (11), или (12) приводятся к вырожденным гипергеометрическим

$$z\frac{\partial^2 u_{k,\gamma}(z)}{\partial z^2}+\left(\frac{3}{2}-z\right)\frac{\partial u_{k,\gamma}(z)}{\partial z}-b_{k,\gamma}u_{k,\gamma}(z)=0;\qquad b_{k,\gamma}=1-\left(\frac{\mu_{k,\gamma}}{\Lambda}\right)^2 \qquad (13)$$

с однородными граничными условиями

$$u_{1,\gamma}(0)=u_{k,\gamma}(\beta_k)=u_{2,\gamma}(\beta_2 a^2)=0\,, \tag{14}$$

Решив задачу (13)-(14), находятся собственные функции задачи (9)-(10) ортонормированные с весом $\rho_k(y)$, которые имеют вид

$$K_{1,\gamma}(y)=C_{1,\gamma}^{-1}yF\left(b_{1,\gamma},\frac{3}{2};z\right)\exp(-z);\quad K_{2,\gamma}(y)=C_{2,\gamma}^{-1}\Delta F\left(b_{2,\gamma},\frac{3}{2};z\right)\exp(-z),$$

где $C_{k,\gamma}^{-1}$ – нормирующие множители,

$$\Delta F(b_{2,\gamma},\frac{3}{2};\beta_2 y^2)=F(b_{2,\gamma}-\frac{1}{2},\frac{1}{2};\beta_2 a^2)yF(b_{2,\gamma},\frac{3}{2};\beta_2 y^2)-aF(b_{2,\gamma},\frac{3}{2};\beta_2 a^2)F(b_{2,\gamma}-\frac{1}{2},\frac{1}{2};\beta_2 y^2).$$

**§3** посвящается выводу формул для нормирующих множителей при собственных функциях исходя из свойств уравнения (12).

В **§4** приводятся способы определения собственных значений спектральной задачи (9)-(10) в зависимости от величины введенного безразмерного параметра $\beta_k$. При умеренных значениях этого параметра собственные числа $\mu_{k,\gamma}^2 a_k^{-1}$ можно находить из характеристических уравнений непосредственно

$$F(b_{1,\gamma},\frac{3}{2};\beta_1)=0,\qquad \Delta F(b_{2,\gamma},\frac{3}{2};\beta_2)=0, \tag{15}$$

решая их численными методами. Используя частные случаи вырожденных гипергеометрических функций, в уравнениях (15) можно перейти к функциям параболического цилиндра.

При малых значениях параметра $\beta_k$ собственные числа находятся методом, основанным на теории возмущенного дифференциального оператора с использованием известного асимптотического разложения

$$\frac{\mu^2{}_{1,\gamma}}{a_1}=(\pi\gamma)^2+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_{2m}}{\gamma^{2m}},\qquad \frac{\mu^2{}_{2,\gamma}}{a_2}=\left(\frac{\pi\gamma}{a-1}\right)^2+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{d_{2m}}{\gamma^{2m}},\qquad \gamma\in N/ \tag{16}$$

Для этого подстановкой Штурма

$$K_{k,\gamma}(y)=\upsilon_{k,\gamma}(y)\exp\left(-\frac{1}{2}\beta_\kappa y^2\right)$$

уравнение (12) приводится к виду

$$-\upsilon''_{k,\gamma}(y)+[(\beta_k y)^2+\beta_k]\upsilon_{k,\gamma}(y)=\frac{\mu_{k,\gamma}^2}{a_k}\upsilon_{k,\gamma}(y) \tag{17}$$

с однородными граничными условиями

$$\upsilon_{1,\tau}(0)=\upsilon_{k,\gamma}(1)=\upsilon_{2,\gamma}(a)=0. \tag{18}$$

Считается, что левая часть уравнения (17) порождается возмущенным дифференциальным оператором.

При больших значениях $\beta_k$ уравнение (17) преобразуется к виду

$$\upsilon''_{k,\gamma}(y)-\beta_k^2(y^2-y^2{}_{k,\gamma})\,\upsilon_{k,\upsilon}(y)=0;\qquad y_{k,\gamma}=\sqrt{(3-4b_{k,\gamma})\beta_k^{-1}}. \tag{19}$$

В этом случае для нахождения собственных чисел используется асимптотическое разложение для решения уравнения (18) в вещественной окрестности точки поворота $y_{k,\gamma}$. Тогда нетривиальные решения задачи (19)–(18), полученные с точностью до порядка $O\left(\beta_k^{-1}\right)$, возможны лишь при значениях собственных чисел, удовлетворяющих характеристическим уравнениям

$$\mathrm{Bi}\left(\beta_k^{\frac{2}{3}}\xi_\gamma\left(y_2,\beta_k^{-1}\right)\right)\mathrm{Ai}\left(\beta_k^{\frac{2}{3}}\xi_\gamma\left(y_1,\beta_k^{-1}\right)\right)-\mathrm{Ai}\left(\beta_k^{\frac{2}{3}}\xi_\gamma\left(y_2,\beta_k^{-1}\right)\right)\mathrm{Bi}\left(\beta_k^{\frac{2}{3}}\xi_\gamma\left(y_1,\beta_k^{-1}\right)\right)=0, \tag{20}$$

где $y_1=0$, $y_2=1$ при $k=1$; $y_1=1$, $y_2=a$ при $k=2$,

$$\xi_\gamma(y,\beta_k^{-1})=\left(\frac{3}{2}\int_{y_{k,\gamma}}^{y}\left|y^2-y_{k,\gamma}^2\right|^{\frac{1}{2}}dy\right)^{\frac{2}{3}}\operatorname{sgn}(y-y_{k,\gamma}).$$

При больших значениях аргументов в уравнении (20) следует воспользоваться известными асимптотическими формулами для функций Эйри. Уравнение (20) решается численным методом.

В **§5** решается уравнение для изображения функции $T_k(y,\tau)$, которое оказывается линейным. Затем с помощью обратного преобразования получается формула обращения для введенного интегрального преобразования, что позволяет выписать аналитическое решение задачи.

В ходе решения задачи из условия Стефана (4) с использованием решения задачи (1)-(3) получается трансцендентное уравнение относительно параметра Λ, зависящего от теплофизических характеристик среды и краевых условий.

В **§6** обосновывается требование самосопряженности, накладываемое на уравнение (9) с помощью теоремы о разложении по собственным функциям.

Теорема. Если интеграл

$$\int_{0}^{y_2}\left[T_k\left(y,\tau\right)\right]^2\rho_k(y)\,dy<\infty \tag{21}$$

равномерно ограничен относительно τ, а функция $T_k(y,\tau)$ дважды непрерывно дифференцируема в $[y_1,y_2]$ и удовлетворяет граничным условиям задачи Штурма-Лиувилля (11)–(10), то она может быть представлена в виде суммы ряда (равномерно сходящегося по τ)

$$T_k(y,\tau)=\sum_{\gamma=1}^{\infty}u_{k,\gamma}(\tau)K_{k,\gamma}(y), \tag{22}$$

где

$$u_{k,\gamma}(\tau)=\int_{y_1}^{y_2}T_k(y,\tau)K_{k,\gamma}(y)\rho_k(y)dy,$$

а равенство (22) понимается в смысле сходимости в среднем, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{y_1}^{y_2}\left[T_k(y,\tau)-\sum_{\gamma=1}^{n}U_{k,\gamma}(\tau)K_{k,\gamma}(y)\right]^2\rho_k(y)\,dy=0. \tag{23}$$

В этом случае выполняется равенство Парсеваля

$$\int_{y_1}^{y_2} \mathrm{T}_k^2(y,\tau)\rho_k(y)dy = \sum_{\gamma=1}^{\infty} U_{k,\gamma}^2(\tau).$$

Если соотношение (23) имеет место для функции $\mathrm{T}_k(y,\tau)$ из какого-либо класса функций, удовлетворяющие условию квадратичной интегрируемости (21), то ортонормированная с весом $\rho_k(y)$ система собственных функций $K_{k,\gamma}(y)$ является полной в рассматриваемом классе функций. Необходимым условием полноты системы функций $K_{k,\gamma}(y)$ является свойство замкнутости этой системы, заключающееся в том, что из равенств

$$\int_{y_1}^{y_2} T_k(y,\tau)K_{k,\gamma}(y)\rho_k(y)dy = 0, \quad \gamma \in N/$$

вытекает равенство $\mathrm{T}_k(y,\tau)=0$, при $y \in [y_1, y_2]$ для любых функций $\mathrm{T}_k(y,\tau)$, удовлетворяющих условию (21).

Если функция $\mathrm{T}_k(y,\tau)$ удовлетворяет сформулированным требованиям, то формула (22) представляет обратное преобразование. Из единственности разложения следует взаимнооднозначное соответствие между функциями $\mathrm{T}_k(y,\tau)$ и $U_k(y,\tau)$. Поэтому, решив преобразованную задачу, с учетом (8), получаем решение исходной задачи.

**Во второй главе** изучается двухмерная однофазная задача Стефана.

В **§1** формулируется постановка изучаемой задачи. Математическая модель процесса теплообмена для такой задачи имеет вид

$$\frac{\partial t(x_1, x_2, \tau)}{\partial \tau} = a^2 \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 t(x_1, x_2, \tau)}{\partial x_i^2}; \tag{24}$$

$$(x_1, x_2) \in D(x,\tau) = \{|x_1| < \xi_1(\tau), 0 < x_2 < \xi(x_1, \tau)\},$$

$$\tau > 0, \quad \xi_1(+0) > 0, \ \xi(x_1, +0) > 0;$$

$$t(x_1, x_2, 0) = \left(1 - \frac{|x|}{\xi_1(0)}\right)\left(1 - \frac{x_2}{\xi(x_1, 0)}\right)t_0; \tag{25}$$

$$t(x_1, 0, \tau) = \left(1 - \frac{|x_1|}{\xi_1(0)}\right)t_0 \ ; \tag{26}$$

$$t(x_1, \xi(x_1,\tau), \tau) = 0; \tag{27}$$

$$\xi(\xi_1(\tau), \tau) = 0;$$

$$\lambda \frac{\partial t(x_1, \xi(x_1, \tau), \tau)}{\partial \vec{l}} = \sigma \nu \frac{\partial \xi(x_1, \tau)}{\partial \tau}, \tag{28}$$

где $\vec{l}$ –внешняя нормаль к линии $S_\tau$, функция $\xi(x_1, \tau)$ изображает гладкую линию $S_\tau$, пересекающуюся с полупрямыми, исходящими из точки ($x_1$=0, $x_2$=0), не более чем в одной точке, $\sigma$ – скрытая теплота кристаллизации, $a^2$; $\lambda$ – коэффициенты температуропроводности и теплопроводности, соответственно, $\nu$ – плотность образующейся фазы.

Требуется найти функции $t(x_1, x_2, \tau)$, $\xi(x_1, \tau)$, $\xi_1(\tau)$, удовлетворяющие равенствам (24)-( 28).

В **§2** с помощью подстановок

$$x_1 = y_1 \xi_1(\tau), \qquad x_2 = y_2 \xi(x_1, \tau), \tag{29}$$

$$T(y_1, y_2, \tau) = t\left(y_1 \xi_1(\tau), y_2 \xi(x_1, \tau), \tau\right) - (1 - |y_1|)(1 - y_2) t_0$$

задача (24)-(26) сводится к решению уравнения

$$\begin{gathered}
\frac{\partial T(y_1, y_2, \tau)}{\partial \tau} + t_0 \Phi(y_1, y_2, \tau) = \left[ a^2 \frac{\partial^2 T(y_1, y_2, \tau)}{\partial y_1^2} + \xi_1(\tau) \xi_1'(\tau) y_1 \frac{\partial T(y_1, y_2, \tau)}{\partial y_1} \right] \xi_1^{-2}(\tau) + \\
+ \left\{ a^2 \left[ (\xi_{x_1}'(x_1, \tau))^2 y_2^2 + 1 \right] \frac{\partial^2 T(y_1, y_2, \tau)}{\partial y_2^2} + \left[ a^2 \left( 2 \left( \xi_{x_1}'(x_1, \tau) \right)^2 - \xi(x_1, \tau) \xi_{x_1 x_1}''(x_1, \tau) \right) + \right. \right. \\
\left. \left. + \xi(x_1, \tau) \xi_\tau'(x_1, \tau) \right] \cdot y_2 \frac{\partial T(y_1, y_2, \tau)}{\partial y_2} \right\} \xi^{-2}(x_1, \tau); \\
(y_1, y_2) \in D_y = \{ |y_1| < 1, 0 < y_2 < 1 \}
\end{gathered} \tag{30}$$

с однородными краевыми условиями

$$T(y_1, y_2, 0) = 0; \tag{31}$$

$$T(y_1, 0, \tau) = T(y_1, 1, \tau) = 0, \tag{32}$$

где

$$\begin{gathered}
\Phi(y_1, y_2, \tau) = |y_1| (1 - y_2) \frac{\xi_1'(\tau)}{\xi_1(\tau)} + (1 - |y_1|) y_2 \frac{\xi_\tau'(x_1, \tau)}{\xi(x_1, \tau)} + \\
+ a^2 \left\{ 2 \frac{\operatorname{sgn} y_1}{\xi_1(\tau)} \frac{\xi_{x_1}'(x_1, \tau)}{\xi(x_1, \tau)} - \left(1 - |y_1|\right) y_2 \left[ \frac{\xi_{x_1 x_1}''(x_1, \tau)}{\xi(x_1, \tau)} - 2 \left( \frac{\xi_{x_1}'(x_1, \tau)}{\xi(x_1, \tau)} \right)^2 \right] \right\} y_2 .
\end{gathered}$$

Решение задачи (30)-(32) ищется двухкратным применением конечных интегральных преобразований по переменным $y_1$ и $y_2$. При этом полагается, что постулируемые ниже свойства преобразований имеют место равномерно относительно $y_2$,$\tau$ и $\tau$, соответственно.

Ядро преобразования (2.2.6) является решением уравнения

$$\begin{gathered}
a^2 \frac{\partial^2 \left[ \rho(y_1) K(y_1, \gamma_1) \right]}{\partial y_1^2} - \xi_1(\tau) \xi_1'(\tau) \frac{\partial \left[ y_1 \rho(y_1) K(y_1, \gamma_1) \right]}{\partial y_1} + \\
+ \mu^2(\gamma_1) \rho(y_1) K(y_1, \gamma_1) = 0
\end{gathered} \tag{33}$$

с однородными граничными условиями

$$K(0,\gamma_1) = K(\pm 1,\gamma_1) = 0 \ , \tag{34}$$

Для обеспечения условий, позволяющих получить это разложение решения задачи (30)-(32) по собственным функциям $K(y_1,\gamma_1) = K_{\gamma_1}(y_1)$, соответствующих собственным числам $\mu^2_{\gamma_1}$, на уравнение (33) накладывается требование самосопряженности, откуда определяется весовая функция

$$\rho(y_1) = \exp(\alpha y_1^2), \qquad \alpha_1 = \left(\frac{\Lambda_1}{2a}\right)^2$$

с точностью до произвольного постоянного множителя и устанавливается закон движения границы фазового перехода на горизонтальной оси

$$\xi_1^2(\tau) = \int_0^\tau \Lambda_1^2 d\eta = \Lambda_1^2\tau + \xi_0^2$$

Уравнение (33) имеет следующий самосопряженный вид

$$\frac{d}{dy_1}\left[\rho(y_1)\frac{dK_{\gamma_1}(y_2)}{dy_1}\right] + \left(\frac{\mu_{\gamma_1}}{a}\right)^2 \rho(y_1)K_{\gamma_1}(y_1) = 0, \tag{35}$$

которое приводится к виду

$$\frac{d^2K_{\gamma_1}(y_1)}{dy_1^2} + 2\alpha_1 y_1 \frac{dK_{\gamma_1}(y_1)}{dy_1} + \left(\frac{\mu_{\gamma_1}}{a}\right)^2 K_{\gamma_1}(y_1) = 0\,. \tag{36}$$

Подстановками

$$K_{\gamma_1}(y_1) = \sqrt{\frac{z_1}{\alpha_1}} u_{\gamma_1}(z_1)\exp(-z_1), \qquad z_1 = (\alpha_1 y_1^2)$$

уравнение (36) приводится к вырожденному гипергеометрическому

$$z_1\frac{du_{\gamma_1}}{dz_1^2} + \left(\frac{3}{2} - z_1\right)\frac{du_{\gamma_1}(z_1)}{dz_1} - b_{\gamma_1}u_{\gamma_1}(z_1) = 0 \quad , \tag{37}$$

где $b_{\gamma_1} = 1 - \left(\dfrac{\mu_{\gamma_1}}{\Lambda_1}\right)^2$, при однородных граничных условиях

$$u_{\gamma_1}(0) = u_{\gamma_1}(\alpha_1) = 0\,. \tag{38}$$

Решив задачу (37)-(38), находятся собственные функции (ядра) задачи (33)-(34), ортонормированные с весом $\rho(y_1)$

$$K_{\gamma_1}(y_1) = C_{\gamma_1}^{-1} y_1 F\left(b_{\gamma_1}, \frac{3}{2}; \alpha_1 y_1{}^2\right)\exp(-\alpha_1 y_1^2).$$

Здесь $C_{\gamma_1}^{-1}$ – нормирующий множитель, $\gamma \in N/$ .

В **§3** приводятся способы определения собственных значений спектральной задачи (33)-(34) в зависимости от величины безразмерного параметра $\alpha_1$, как это показано в первой главе при решении одномерной задачи. При малых значениях $\alpha_1$ нахождение собственных чисел основано на теории возмущенного дифференциального оператора с использованием известного асимптотического разложения по малому параметру. При больших значениях $\alpha_1$ для нахождения собственных чисел используется асимптотическое разложение уравнения второго порядка в вещественной окрестности точки поворота.

В **§4** находятся собственные функции для интегрального преобразования по $y_2$, также через вырожденные гипергеометрические функции. Одновременно устанавливается форма подвижной границы и закон движения в зависимости от времени. Он снова оказывается параболическим, а форма свободной границы, соответствующая решению изучаемой задачи, представляет собой расширяющийся во времени полуквадрат с центром квадрата в начале пространственной системы координат.

В **§5** приводятся способы определения собственных значений спектральной задачи, постановка которой связана с интегральным преобразованием по переменной $y_2$. Собственные числа находятся точно так же, как это показано в §4 главы 1, или §3 главы 2.

В **§6** решается уравнение для изображения функции $u_{\gamma_1}(y_2, \tau)$, которая, в свою очередь, является изображением функции $T(y_1, y_2, \tau)$. Уравнение для изображения $V_{\gamma_1,\gamma_2}(\tau)$ оказывается линейным. С помощью обратных преобразований получается формула обращения для введенных интегральных преобразований, что позволяет с учетом (29) выписать аналитическое решение задачи.

В ходе решения задачи из условия Стефана (28) с учетом (27) с использованием решения задачи (24)-(26) получаются трансцендентные уравнения относительно параметров $\Lambda_1$ и $\Lambda_2$. Они оказываются равными: $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$, что связано с формой подвижной границы.

В **§7** обосновывается требование самосопряженности, накладываемые на уравнения для ядер введенных интегральных преобразований с помощью теорем о разложении по собственным функциям, что позволяет получить и выписать окончательное аналитическое решение изучаемой задачи.

**В третьей главе** приводится разработка методики численного расчета аналитического решения одномерной задачи.

В **§1** с помощью рекуррентных и функциональных соотношений для ВГГФ и характеристических уравнений (15) выражения для распределения температурных полей преобразуются в компактные вычислительные формулы с хорошо сходящимися рядами:

$$t_1(x,\tau)=(1-y)t_e-\frac{1}{2}t_e y e^{(1-y^2)\beta_1}\sum_{\gamma=1}^{\infty}\frac{F\left(b_{1,\gamma},\frac{3}{2};\beta_1 y^2\right)}{(1-b_{1,\gamma})(1{,}5-b_{1,\gamma})\,\sigma_{1,\gamma}}, \qquad (39)$$

где $y=\dfrac{x}{\Lambda\sqrt{\tau}}$, $\sigma_{1,\gamma}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\psi\left(n+b_{1,\gamma}\right)-\psi\left(b_{1,\gamma}\right)\right]\dfrac{(b_{1,\gamma})_n}{(1{,}5)_n}\dfrac{\beta_1^n}{n!}$, $\psi\left(b_{1,\gamma}\right)$ есть пси-функция, $(b_{1,\gamma})_n$ – символ Похгаммера.

$$t_2(x,\tau)=(y-1)\frac{t_0}{a-1}-\frac{t_0\exp\left[\left(1-y^2\right)\beta_2\right]}{2(a-1)}\sum_{\gamma=1}^{\infty}\frac{\Delta F\left(b_{2,\gamma},\frac{3}{2};\beta_2 y^2\right)}{\left(1-b_{2,\gamma}\right)\left(1{,}5-b_{2,\gamma}\right)\sigma_{2\gamma}}\left[a\frac{\Delta F'_y\left(b_{2,\gamma},\frac{3}{2};\beta_2 a^2\right)}{\Delta F'_y\left(b_{2,\gamma},\frac{3}{2};\beta_2\right)}-1\right], \qquad (40)$$

где символ $\Delta F\left(b_{2,\gamma},\frac{3}{2};\beta_2\right)$ расшифрован в выражениях для собственных функций, которые получаются после решения задачи (13)-(14), а величина $\sigma_{2,\gamma}$ является результатом дифференцирования $\Delta F\left(b_{2,\gamma},\frac{3}{2};\beta_2\right)$ по первому параметру. Начиная с $\gamma=4$, при вычислении $\sigma_{2,\gamma}$ используются рекуррентные соотношения для производных по первому параметру от вырожденных гипергеометрических функций. Десятикратное применение этих соотношений влечет потерю примерно одной значащей цифры, что не влияет на сходимость решения в силу его достаточно быстрой сходимости.

В этом же параграфе с помощью асимптотического представления вырожденной гипергеометрической функции, когда $b_{k,\gamma}\to-\infty$, $\beta_k y^2<10$ дается оценка сходимости решений (39), (40), согласно которой при $\gamma\to\infty$ ряды абсолютно сходятся не хуже числового ряда $\sum\limits_{\gamma=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma^3}$.

В **§2** для данных теплофизических характеристик среды и краевых условий изучаемой задачи с использованием рекуррентных и функциональных соотношений для вырожденных гипергеометрических функций и условия Стефана приводится приближённо-аналитический метод вычисления параметра $\Lambda$, который определяет скорость движения свободной границы $\xi_1(\tau)=\Lambda\sqrt{\tau}$, а также безразмерного параметра $\beta_k$. Дается оценка полученного решения при больших и малых значениях времени. Доказывается, что для больших значений времени при вычислении параметра $\Lambda$ разность между левой и правой частями уравнения (4) имеет порядок малости $O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)$. Вычисляются собственные значения, составляются соответствующие таблицы и строятся графики распределения температурного поля по пространственной и временной координатам, график зависимости положения свободной границы от времени и график распределения температурного поля в начальный момент времени.

## Основные результаты работы

1. Методом разложения по собственным функциям самосопряженного дифференциального оператора получены приближенно-аналитические решения нестационарных одномерной и двумерной задач теплообмена с фазовым переходом. Метод основан на конечных интегральных преобразованиях с ядрами, нахождение которых связано с постановкой и решением соответствующих спектральных задач через вырожденные гипергеометрические функции.
2. Представлен приближенно-аналитический метод построения температурных полей и определения положения свободной границы, основанный на функциональных и рекуррентных соотношениях между вырожденными гипергеометрическими функциями. Получены компактные вычислительные формулы, содержащие быстро сходящиеся ряды. Установлено, что на бесконечности они абсолютно сходятся не хуже числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$. Численные эксперименты показывают, что в зоне промерзания для получения значения температуры в градусах Цельсия с относительной погрешностью, не превышающей 0,0005, достаточно четырех слагаемых, а в зоне охлаждения – восьми слагаемых. Исследовано поведение решения при малых и больших значениях времени $\tau$. При больших значениях времени погрешность определения скорости движения свободной границы для полученного решения имеет порядок малости $O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)$.
3. В зависимости от скорости движения свободной границы собственные значения спектральных задач находятся тремя различными методами, два из которых асимптотические, а два из них сочетаются с численными методами. При необходимости возможно использование вторичной асимптотики. Методы отличаются тем, что собственные функции выражаются через вырожденные гипергеометрические функции, функции параболического цилиндра, а также функции Эйри.

4. Усовершенствован численный метод при нахождении спектральной функции на основе вырожденных гипергеометрических функций, функций параболического цилиндра, функций Эйри и их асимптотических представлений с использованием программной системы «Maple».

### Публикации по теме диссертации в изданиях из перечня ВАК


1. **Зайнуллин, Р.Г.** Об одном аналитическом подходе к решению одномерной задачи переноса тепла со свободными границами / Р.Г. Зайнуллин // Изв. Вузов. Математика. – 2008. – №2. – С. 24-31.
2. **Зайнуллин Р.Г.** Математическое моделирование процесса теплообмена с фазовым переходом / Р.Г. Зайнуллин // Вестник УГАТУ. Сер. Управление, информатика, вычислительная техника. – 2009. – №2 (35). – С. 265-279.


### Публикации в других изданиях


1. **Зайнуллин Р.Г.** Решение одной задачи переноса тепла при наличии движущихся границ / Р.Г. Зайнуллин, М.Н. Шафеев // Функционально-дифференциальные уравнения: материалы IX Уральской региональной конференции / Уфа. – УАИ, 1989. – С.35
2. **Зайнуллин Р.Г.** Решение одной двумерной задачи переноса тепла со свободными границами / Р.Г. Зайнуллин // Актуальные проблемы математики. Математические методы в естествознании : межвуз. науч. сб. / Уфа. – УГАТУ, 1999. – С.120-125.
3. **Зайнуллин Р.Г.** Плоская нестационарная задача теплообмена с фазовым переходом для полуполосы/ Р.Г. Зайнуллин, М.Н. Шафеев, Р.Г. // Моделирование, вычисление, проектирование в условиях неопределенности: труды м/н научной конференции / Уфа. – УГАТУ, 2-5 фев. 2000. – с.227-231.
4. **Зайнуллин Р.Г.** Об одном приложении метода ВГГП. / Р.Г. Зайнуллин, М.Н. Шафеев, Р.Г. Самигуллина // Вопросы теории и расчета рабочих процессов тепловых двигателей : межвузовский научный сборник / Уфа. – УГАТУ, 2000. №18– С.120-125.
5. **Зайнуллин Р.Г**. Одномерная задача теплообмена с фазовым переходом при движущемся источнике холода / Р.Г. Зайнуллин, М.Н. Шафеев // Актуальные проблемы математики. Математические модели современного естествознания: межвуз. науч. сб. / Уфа. – УГАТУ, 2002. – С.69-72.
6. **Зайнуллин Р.Г.** Решение одномерной простанственной задачи теплообмена со свободными границами / Р.Г. Зайнуллин, М.Н. Шафеев, Р.Г. Самигуллина // Электромеханика, электротехнические комплексы: межвуз. науч. сб. / Уфа. – УГАТУ, Институт механики УНЦ РАН, 2002. – С.138-141.

7. **Зайнуллин, Р.Г.** Решение одной пространственной задачи переноса тепла при наличии движущихся границ по одномерной схеме. / Р.Г. Зайнуллин, М.Н. Шафеев, Р.Г. Самигуллина // Здравоохранение Башкортостана. Научно-практическая конференция, посвященная Году здоровья и 70-летию БГМУ. Материалы конференции. – 2002. – Спецвыпуск №3. –С.311-314.
8. **Зайнуллин Р.Г.** Об одном аналитическом решении одномерной задачи переноса тепла со свободными границами/ Р.Г. Зайнуллин // Актуальные проблемы математики. Математические модели современного естествознания: межвуз. науч. сб. / Уфа. – УГАТУ, 2004. – С.144-147.
9. **Зайнуллин Р.Г.** Решение одной одномерной задачи переноса тепла с фазовым переходом. / Р.Г. Зайнуллин, Р.Г. Самигуллина // Сборник материалов Уфимской м/н математической конференции посвященной памяти А.Ф.Леонтьева /Уфа. – ИМВЦ, 2007. –Т1, – С.96.
10. **Зайнуллин Р.Г.** Об одном аналитическом подходе к решению одномерной задачи теплообмена с движущимися границами. / Р.Г. Зайнуллин // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: труды м/н научной конференции 24-28.06.08, / Стерлитамак – Уфа, Гилем , 2008. – Т1, – С. 242.
11. **Зайнуллин Р.Г.** Аналитическое решение одномерной задачи теплообмена с фазовым переходом / Р.Г. Зайнуллин, Р.Г. Самигуллина // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования: материалы III м/н научной конференции / Воронеж - Научная книга, 2009. – Ч.1, – С. 216.
12. **Зайнуллин Р.Г.** Об аналитическом подходе к решению одномерной задачи переноса тепла с движущимися границами / Р.Г. Зайнуллин // Математическое моделирование и краевые задачи: труды шестой Всероссийской научной конференции с международным участием / Самара – Сам. ГТУ., 2009. – С.121–124.
13. **Зайнуллин Р.Г.** Об одном аналитическом подходе к решению двухфазной задачи Стефана с ограниченной областью теплового влияния/ Р.Г. Зайнуллин // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: вторая м/н научная конференция / Минск. – Институт математики НАН Беларуси, 2009. – Ч.1, – С.138-139.

ЗАЙНУЛЛИН Рифат Гильметдинович

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ТЕПЛООБМЕНА СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано к печати 25.11.2010. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать плоская. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 1,0. Усл. кр. – отт. 1,0. Уч. – изд. л. 1,0.
Тираж 100 экз. Заказ № 482

ГОУ ВПО Уфимский государственный авиационный технический университет
Центр оперативной полиграфии
450000, Уфа-центр, ул.К.Маркса, 12