**На правах рукописи**

**ПАРАМОШИНА Ирина Геннадьевна**

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХСЯ ДИФФУЗИОННЫМИ СВЯЗЯМИ И СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ В ВИДЕ БЕЛОГО И ЦВЕТНОГО ШУМОВ

**Специальность 05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ**

**АВТОРЕФЕРАТ**
**диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук**

**Уфа – 2008**

Работа выполнена на кафедре математики в ГОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет»

Научный руководитель — д-р физ.-мат. наук, проф.
**НАСЫРОВ Фарит Сагитович**

Официальные оппоненты — д-р физ.-мат. наук, проф.
**АСАДУЛЛИН Рамиль Мидхатович**

канд. физ.-мат. наук, доц.
**КОЛОДИЙ Александр Михайлович**

Ведущая организация — **Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского**

Защита диссертации состоится 25 декабря 2008 г. в $10^{00}$ часов на заседании диссертационного совета Д 212.288.06 при ГОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» по адресу: 450000, г. Уфа, Республика Башкортостан, ул. К. Маркса, д. 12, корп. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета.

Автореферат разослан «__» ____________ 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д-р физ.-мат. наук, проф. **БУЛГАКОВА Г. Т.**

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

**Актуальность темы**

В данной работе исследуются модели некоторых процессов, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ) в частных производных параболического типа. Как правило, такие модели описывают поведение распределенных в пространстве систем, которые характеризуются тем, что их состояние меняется в различных точках пространства, между отдельными точками существуют «диффузионные связи» или потоки вещества, и, кроме того, имеют место неизбежные случайные воздействия внешней среды.

Первой является модель процесса реакции деления тяжелых ядер (U, Pu и др.), когда при взаимодействии с нейтронами некоторые тяжелые ядра атомов делятся на более легкие ядра с испусканием нескольких новых нейтронов и выделением значительной ядерной энергии. Строится модель, отражающая основные динамические свойства этой реакции, а именно изменение концентрации нейтронов. При этом учитываются случайные воздействия на процесс в виде шума. Математическая модель такого процесса описывается первой краевой задачей для стохастического дифференциального уравнения в частных производных параболического типа. С помощью аналогичного уравнения строится вторая модель - модель развития популяции в случайной среде, которая описывает изменение «плотности» популяции с учетом распространения особей в пространстве и случайных внешних воздействий на процесс в виде шума. Третья рассматриваемая в работе модель описывает поведение волн в вязкой среде, и представляется в виде первой краевой задачи для уравнения Бюргерса со случайным внешним источником, которое, как известно, с помощью преобразования Хопфа-Коула сводится к уравнению параболического типа.

Стохастические дифференциальные уравнения в частных производных исследовались многими авторами (Розовским Б. Л., Alos E., Bonnacorsi S., Da Prato G., Mao X., Markus L., Maslowski B., Sowers R. и др.), но точное решение подобных уравнений удается получить лишь в ограниченном числе случаев. Поэтому существенную роль в изучении моделей со случайными возмущениями играют способы численного построения решения. Огромный вклад в теорию численного моделирования стохастических дифференциальных уравнений внесли работы Кузнецова Д. Ф., Мильштейна Г. Н., Allen E., Kloeden P. E., Platen E. Однако по-прежнему проблема численного моделирования решения СДУ в частных производных является трудной как с теоретической, так и с вычислительной точки зрения. Поэтому задача преодоления сложности моделирования процессов, характеризующихся диффузионными связями и случайными воздействиями в виде белого и цветного шумов, является весьма актуальной.

**Цель работы**

Целью данной работы является разработка численно - аналитических методов решения стохастических дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа и моделирование на основе этих методов процессов в распределенных системах.

Поставленная цель достигается в результате решения следующих *задач*:

1. Разработки аналитического аппарата для решения стохастических дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа;

2. Моделирования процессов, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями в частных производных параболического типа, а именно, процесса изменения концентрации нейтронов при реакции деления тяжелых ядер, процесса развития популяции в случайной среде и процесса распространения волн в вязкой среде со случайным источником;

3.Исследования структуры решения стохастических дифференциальных уравнений;

4. Оценки погрешности численных результатов.

**Методы исследования**

Аналитические исследования проводились с использованием методов теории случайных процессов, математической физики, функционального анализа, вычислительной математики и техники симметричных интегралов, разработанной в работах Насырова Ф. С. Использовался метод вычислительного эксперимента на ПЭВМ. Расчеты проводились в среде Matlab с использованием стандартных пакетов.

**На защиту выносятся:**

1. Новый аналитический метод решения одного широкого класса нелинейных стохастических дифференциальных уравнений в частных производных.

2. Новый способ численно-аналитического решения и моделирования процессов, которые характеризуются «диффузионными связями» и случайными воздействиями и описываются стохастическими дифференциальными уравне-

ниями в частных производных параболического типа и стохастическими уравнениями Бюргерса, а именно, процесса изменения концентрации нейтронов при реакции деления тяжелых ядер, процесса развития популяции в случайной среде и процесса распространения волн в вязкой среде со случайным источником;

3. Факторизация стохастических дифференциальных уравнений по случайному сносу, факторизация фундаментальных решений параболических уравнений, соответствующих стохастическим дифференциальным уравнениям, по коэффициенту переноса.

4. Оценка погрешности численных результатов, полученных для стохастического уравнения Бюргерса, с помощью вычислительного эксперимента.

**Научная новизна**

1. Разработан новый аналитический метод решения для моделей процессов в распределенных системах, учитывающих «диффузионные связи» и случайные воздействия в виде шума, которые описываются с помощью СДУ в частных производных параболического типа, заключающийся в том, что решение исходного СДУ в частных производных сводится к решению двух классических дифференциальных уравнений, но со случайными коэффициентами. Этот способ применим и к более общему классу стохастических дифференциальных уравнений в частных производных.

2. Впервые выявлена структура решения одного класса стохастических дифференциальных уравнений, которая включает в себя стохастические дифференциальные параболического типа. Определена структура одномерного диффузионного процесса и установлено, что множество стохастических дифференциальных уравнений можно разбить на классы эквивалентности по случайному сносу, а фундаментальные решения соответствующих параболических уравнений можно факторизовать по коэффициенту переноса.

3. Предложен новый способ численно-аналитического решения и моделирования процессов, описываемых СДУ в частных производных параболического типа и стохастических уравнений Бюргерса, отличающийся тем, что вместо существующих громоздких методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений можно воспользоваться классическими методами численно-аналитического решения двух обычных дифференциальных уравнений в частных производных, где в качестве коэффициентов или краевых условий присутствует винеровский процесс. Методом вычислительного эксперимента проведена оценка погрешности для численных результатов, полученных для стохастического уравнения Бюргерса.

**Теоретическая и практическая значимость**

Разработанный в рамках данной работы численно-аналитический метод решения стохастических дифференциальных уравнений в частных производных может быть использован для исследования моделей, описывающих различные физические, механические, биологические процессы, характеризующиеся «диффузионными связями» и случайными воздействиями в виде шума.

**Достоверность результатов** диссертационной работы обусловлена строгостью аналитических доказательств полученных результатов. Сходимость численных результатов установлена методом вычислительного эксперимента.

**Апробация работы**

Основные результаты диссертации были представлены и обсуждались на научных семинарах и конференциях, соответствующих профилю диссертации. В частности были сделаны доклады:

1) на XIII международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" (Москва, 2006);

2) на XIV международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" (Москва, 2007);

3) на XV международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов" (Москва, 2008);

4) на Международной школе-семинаре памяти Н. В. Ефимова (Абрау-Дюрсо, 2008 г.);

5) на XV Всероссийской школе-коллоквиуме по стохастическим методам (Волгоград - Волжский, 2008 г.);

6) на семинаре в институте математики с ВЦ УНЦ РАН, руководитель профессор Жибер А. В. (Уфа, 2008 г.);

7) на семинарах по теории вероятностей и математической статистике кафедры математики УГАТУ, руководитель профессор Насыров Ф. С.

**Публикации**

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[10], в том числе 4 публикации в изданиях, рекомендованных ВАК, и 6 публикаций в других изданиях.

**Структура и объем диссертации**

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения, библиографического списка литературы, включающего 62 работы отечественных и зарубежных авторов. Объем диссертации составляет 93 страницы.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

**Введение.** Во введении обосновывается актуальность работы, сформулированы ее цели и задачи. Кроме этого, дан краткий обзор по тематике вопроса, сформулированы основные результаты, полученные в работе, излагается описание диссертации по главам.

**Глава 1. Постановка задачи.**

В данной главе строятся математические модели процессов, характеризуемых «диффузионными связями» и случайными воздействиями в виде шума.

Первая модель связана с процессом изменения концентрации испускаемых при реакции деления тяжелых ядер (U, Pu и др.) нейтронов. Модель отражает основные динамические свойства этой реакции, а именно, скорость изменения концентрации $c(t,x)$ нейтронов. Пусть в начальный момент времени концентрация нейтронов равна $c(0,x)=const$. Введем предположение о быстром уходе нейтронов, вылетевших за пределы рассматриваемого объема. Это позволяет считать концентрацию нейтронов на границе практически равной нулю $c(t,0)=c(t,1)=0$. Модель, описывающая такой процесс, представляет собой первую краевую задачу для СДУ в частных производных параболического типа:

$$c'_t(t,x) = Dc''_{xx}(t,x) + Rc(t,x) + \sigma(t,x)W'(t),$$
$$c(0,x) = const, \quad c(t,0) = 0, \quad c(t,1) = 0,$$

где $D$ - коэффициент диффузии нейтронов, $R$ - коэффициент пропорциональности скорости изменения концентрации нейтронов к самой концентрации, слагаемое $W'(t)$ есть формальная производная винеровского процесса в смысле Ито, а само уравнение следует рассматривать в интегральной форме.

Второй рассматриваемый процесс - процесс развития популяции, находящейся под воздействием случайных возмущений. Пусть $u(t,x)$ - плотность популяции, $R$ - удельная скорость роста численности, которую можно представить как разность $b-d$ удельной рождаемости $b$ и удельной смертности $d$, $D$ - коэффициент диффузии особей популяции в пространстве. Считаем, что плотность популяции на границе области равна нулю, а в начальный момент времени $u(0,x)=const$. Модель такого процесса описывается следующей первой краевой задачей:

$$\begin{gathered} u'_t(t,x) = Du''_{xx}(t,x) + Ru(t,x) + \sigma(t,x)W'(t), \\ u(0,x) = const, \quad u(t,0) = 0, \quad u(t,1) = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь слагаемое $W'(t)$ есть формальная производная винеровского процесса в смысле Ито, а само уравнение следует рассматривать в интегральной форме. Таким образом, моделирование процесса роста популяции в случайной среде и реакции деления тяжелых ядер привело к аналогичным краевым задачам для СДУ в частных производных параболического типа.

В качестве третьего процесса рассматривается модель распространения волн в вязкой среде со случайным внешним источником, которая описывается стохастическим уравнением Бюргерса:

$$\begin{gathered} u'_t(t,x) = \mu u''_{xx}(t,x) + u(t,x)u'_x(t,x) + \sigma W'(t), \\ t \in [0,T], x \in [0,1], \end{gathered} \tag{2}$$

с начальными и граничными условиями

$$u(0,x) = \sin 2\pi x, \quad u(t,0) = u(t,1) = W(t). \tag{3}$$

## Глава 2. Разработка аналитического аппарата, необходимого для решения поставленных задач.

Глава 2 посвящена аналитическому исследованию СДУ и их детерминированных аналогов.

В § **2.1** приводятся основные определения и понятия стохастического исчисления и теории симметричных интегралов. Пусть $W(t)=W(t,\omega)$, $W(0)=0$, $t\in[0,+\infty)$ - стандартный винеровский процесс, заданный на вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, F, (F_t), P)$. Вводятся в простейшем случае определения стохастических интегралов Ито и Стратоновича и формула Ито связи между ними.

Рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение в форме Ито:

$$dy(t) = \sigma(t, y(t))dW(t) + b(t, y(t))dt, \quad t \ge 0,$$

с $F_0$ - измеримым начальным условием $y(0)=y_0$. Приводятся определения решений СДУ, теоремы о существовании и единственности решений, явные формулы решений для некоторых классов СДУ.

Вводятся основные понятия, связанные с симметричным интегралом, который является детерминированным аналогом стохастического интеграла Стратоновича. Пусть $X(s)$, $s\in[0,\infty)$ - произвольная непрерывная функция. Рассмотрим разбиения $T_n$, $n\in N$, отрезка $[0,t]$: $T_n=\{t_k^{(n)}\}$, $0=t_0^{(n)}\le t_1^{(n)}\le\ldots$ $\le t_k^{(n)}\le\ldots\le t_{m_n}^{(n)}=t$, $n\in N$, такие, что $T_n\subset T_{n+1}$, $n\in N$ и $\lambda_n=\max\limits_k\left|t_k^{(n)}-t_{k-1}^{(n)}\right|\to 0$ при $n\to\infty$. Через $X^{(n)}(s), s\in[0,t]$ обозначим ломаную, построенную по функции $X(s)$ и отвечающую разбиению $T_n$, а через $N^{(n)}(t,u)$ соответствующую ей индикатрису Банаха. Введем следующие обозначения: $\Delta t_k^{(n)}=t_k^{(n)}-t_{k-1}^{(n)}$, $[\Delta t_k^{(n)}]=[t_{k-1}^{(n)},t_k^{(n)}]$, $\Delta X_k^{(n)}=X(t_k^{(n)})-X(t_{k-1}^{(n)})$.

***Определение.*** Симметричным интегралом называется

$$\int_0^t f(s,X(s))*dX(s)=\lim_{n\to\infty}\sum_k\frac{1}{\Delta t_k^{(n)}}\int_{[\Delta t_k^{(n)}]}f(s,X^{(n)}(s))ds\Delta X_k^{(n)},$$

если предел в правой части равенства существует и не зависит от выбора последовательности разбиений $T_n, n\in N$.

Приводятся формулы для вычисления симметричного интеграла. Рассматриваются детерминированные аналоги СДУ, построенные на основе симметричного интеграла. Приводится метод, позволяющий свести решение такого уравнения к решению цепочки обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

В § **2.2** приводятся основные теоретические результаты о решении некоторых классов нелинейных СДУ в частных производных, на основе которых затем будет построен новый метод аналитического решения и численного моделирования. Рассматривается уравнение в частных производных с симметричным интегралом относительно неизвестной функции $u=u(t,x)$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, вида

$$u(t,x)-u(0,x)=\int_0^t F_1\left(s,X(s),x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial^k u}{\partial_{x_1}^{k_1}\ldots\partial_{x_n}^{k_n}},\ldots\right)ds+\qquad(4)$$

$$+\int_0^t F_2\left(s, X(s), x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial_{x_1}^{k_1} \ldots \partial_{x_n}^{k_n}}, \ldots\right) * dX(s),$$

где $k_1 + \ldots + k_n = k \le m$, в области $(s, x) \in R^+ \times R^n$. Здесь в правой части уравнения (4) мы опустили аргументы у функции $u = u(s, x)$.

*Решением* уравнения (4) называется функция $u(s, x) = u(s, x, X(s))$ такая, что, если ее подставить вместе со своими производными в уравнение (4), то, во-первых, имеют смысл интегралы в правой части уравнения, и, во-вторых, она обращает уравнение (4) в тождество.

Решение ищется в виде $u(s, x) = u(s, x, X(s))$ в классе функций $u(s, x, v)$, имеющих непрерывные частные производные $u'_s$, $u'_v$ и непрерывные частные производные по переменным $x_1, \ldots, x_n$ до $m$-го порядка включительно.

***Теорема.*** Функция $u(s, x, X(s))$ из приведенного выше класса функций является решением уравнения (4) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет паре соотношений:

$$u'_v(s, x, v) = F_2\left(s, v, x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial_{x_1}^{k_1} \ldots \partial_{x_n}^{k_n}}, \ldots\right), \tag{5}$$

$$u'_s(s, x, v)\big|_{v = X(s)} = F_1\left(s, X(s), x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial_{x_1}^{k_1} \ldots \partial_{x_n}^{k_n}}, \ldots\right), \tag{6}$$

где в правой части соотношения (5) $u = u(s, x, v)$, и $u = u(s, x, X(s))$ в правой части соотношения (6).

Показано, что решение для одного класса дифференциальных уравнений с симметричным интегралом, если оно существует, имеет специальную структуру. Рассматривается уравнение в частных производных с симметричным интегралом относительно неизвестной функции $u = u(t, x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, вида

$$u(t, x) - u(0, x) = \int_0^t F_1\left(s, X(s), x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial_{x_1}^{k_1} \ldots \partial_{x_n}^{k_n}}, \ldots\right) ds +$$

(7)

$$+\int_0^t F_2(s,x,u)*dX(s),\ \ где\, k_1+...+k_n=k\le m$$

в области $(s,x)\in R^+\times R^n$. Здесь в правой части уравнения (7), как и выше, мы опустили аргументы у функции $u=u(s,x)$. Показано, что решение уравнения (7) имеет структуру $u(s,x,X(s))=\phi(s,x,v+C(s,x))$, где функции $\phi(s,x,v)$ и $C(s,x)$ являются решениями классических дифференциальных уравнений.

Пусть в уравнении (7) функция $X(s)$ есть типичная траектория винеровского процесса $W(s)$, функции

$$F_1\left(s,v,x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},...,\frac{\partial^k u}{\partial_{x_1}^{k_1}...\partial_{x_n}^{k_n}},...\right) \text{ и } F_2(s,x,u) \text{ -}$$

детерминированные. Поскольку вся вероятностная информация о случайном процессе $u(s,x)=\phi(s,x,W(s)+C(s,x))$ содержится в винеровском процессе с гладким случайным сносом $\xi(s,x)=W(s)+C(s,x)$, то классы уравнений вида (7) с $X(s)\equiv W(s)$ разбиваются на классы эквивалентности по случайному сносу $C(s,x)$.

При достаточно общих предположениях показано, что функция $u(s,x)$ является решением уравнения в частных производных (7) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет при каждом $x$ обыкновенному стохастическому дифференциальному уравнению

$$du=\tilde{F}_2(s,x,\xi(s,x))*d\xi(s,x)+\phi_s'(s,x,\xi(s,x))ds,$$

где $\xi(s,x)=W(s)+C(s,x)$, $\tilde{F}_2(s,x,\xi)=F_2(s,x,\phi(s,x,\xi))$.

Отмечено, что для уравнения вида (7) наряду с задачей Коши можно поставить и решать краевые задачи. Однако, в этом случае необходимо учесть следующее: поскольку решение уравнения вида (7) ищется в форме $u(s,x,W(s))$, то граничные условия должны быть согласованы с данным видом решения и, вообще говоря, зависеть от поведения процесса $W(s)$.

На примере одномерного диффузионного процесса, который определяется как решение стохастического дифференциального уравнения

$$\eta(t)-\eta(0)=\int_0^t a(s,\eta(s))*dW(s)+\int_0^t b(s,\eta(s))ds, \tag{8}$$

показано, что решение (8) представляется в виде детерминированной функции

$\eta(s)=\varphi(s,W(s)+C(s))$ от винеровского процесса со случайным сносом.

Множество стохастических дифференциальных уравнений вида (8), удовлетворяющих перечисленным выше предположениям, можно разбить на классы эквивалентности по случайному сносу $C(s)$, поскольку вероятностная структура решений зависит от винеровского процесса со случайным сносом $W(s)+C(s)$. При этом винеровский процесс со случайным сносом $\xi(s)=W(s)+C(s)$ является решением СДУ:

$$\xi(t)-\xi(0)=W(t)+\int_0^t \frac{b(s,\varphi(s,\xi(s)))-\frac{\partial}{\partial s}\varphi(s,x)|_{x=\xi(s)}}{a(s,\varphi(s,\xi(s)))}ds, \qquad (9)$$
$$\xi(0)=W(0)+C(0).$$

Это позволило выявить связь между фундаментальными решениями уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка с произвольными гладкими коэффициентами и такого же уравнения с единичным коэффициентом диффузии и некоторым коэффициентом переноса. Показано, что знание переходной плотности распределения процесса $W(s)+C(s)$ позволяет построить фундаментальные решения для целого класса уравнений Колмогорова.

В § **2.3** изучаются линейные и квазилинейные СДУ в частных производных, с помощью которых описываются исследуемые в работе модели. В частности, рассматривается СДУ в частных производных параболического типа:

$$u'_t(t,x)=Au(t,x)+f(t,x,w,u(t,x))+b(t,x,w,u(t,x))W'(t), \qquad (10)$$
$$u(0,x)=u_0(x),$$

где $x\in R^n$, формальная производная $W'(t)$ понимается в смысле Ито,

$$A=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x,w)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n d_i(t,x,w)\frac{\partial}{\partial x_i} \text{ -}$$

эллиптический оператор второго порядка, в котором $a_{ij}(t,x,w)$ и $d_i(t,x,w)$ - предсказуемые и гладкие функции, а матрица $\{a_{ij}(t,x,w)\}_{i,j=1}^n$ - положительно определенная. Показано, что структура решения этого уравнения имеет вид $u(t,x)=\phi(t,x,W(t)+C(t,x))$, где $\phi(t,x,y)$ и $C(t,x)$ - гладкие случайные функции. Причем неизвестную функцию $\phi(t,x,y)$ следует искать из соотношения

$$\phi'_y(t,x,y)=b(t,x,\phi(t,x,y)),$$

а функцию $C(t,x)$ - из уравнения:

$$C'_t(t,x) = AC(t,x) + \frac{A\phi(t,x,y(t,x))|_{y(t,x)=W(t)+C(t,x)} + \widetilde{A}C(t,x)}{b(t,x,\phi(t,x,W(t)+C(t,x)))},$$

где оператор $\widetilde{A}C(t,x)$ имеет вид:

$$\widetilde{A}C(t,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)[b(t,x,\phi)b'_\phi(t,x,\phi)C'_{x_i}(t,x)C'_{x_j}(t,x) +$$
$$+[b(t,x,\phi)+b'_\phi(t,x,\phi)\phi'_{x_j}(t,x,y(t,x))]C'_{x_i}]+$$
$$+ f(t,x,\phi(t,x,y(t,x))) - \phi'_t(t,x,y(t,x)) -$$
$$-\frac{1}{2}b'_\phi(t,x,\phi(t,x,y(t,x))),$$

где $b(t,x,\phi) = b(t,x,\phi(t,x,W(t)+C(t,x)))$, $y(t,x) = W(t)+C(t,x)$.

Рассматриваются частные случаи стохастических дифференциальных уравнений вида (10). Таким образом, решение стохастического дифференциального уравнения в частных производных параболического типа сводится к решению для классического, а не стохастического, уравнения, но со случайными коэффициентами.

Рассматривается задача Коши для стохастического уравнения Бюргерса

$$u'_t(t,x) = \mu u''_{xx}(t,x) + f(t,x,u(t,x)) - u(t,x)u'_x(t,x) +$$
$$+ b(t,x,u(t,x))W'(t),$$
$$u(0,x) = u_0(x),$$

где $x \in R$, $\mu$ - постоянный коэффициент вязкости среды, формальная производная $W'(t)$ понимается в смысле Ито, а функция $f$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица. Само уравнение следует понимать в интегральной форме. Показано, что решение такого уравнения представляется в виде $u(t,x) = \phi(t,x,W(t)+C(t,x))$, где $\phi(t,x,y)$ и $C(t,x)$ - гладкие случайные функции. Причем неизвестную функцию $C(t,x)$ следует искать из соотношения:

$$C'_t(t,x) = \mu[C''_{xx}(t,x) + (C'_x(t,x))^2 b'_\phi(t,x,\phi) - C'_x(t,x)\phi(t,x,y(t,x))] +$$

$$+\frac{\mu}{b(t,x,\phi)}C'_x(t,x)[b'_x(t,x,\phi) + b'_\phi(t,x,\phi)\phi'_x(t,x,y(t,x))] +$$

$$+\frac{1}{b(t,x,\phi)}[\mu\phi''_{xx}(t,x,y(t,x))-\phi(t,x,y(t,x))\phi'_x(t,x,y(t,x))-$$

$$-\phi'_t(t,x,y(t,x))]+\frac{1}{b(t,x,\phi)}[f(t,x,\phi(t,x,y(t,x)))-$$

$$-\frac{1}{2}b'_\phi(t,x,\phi(t,x,y(t,x)))],$$

где $b(t,x,\phi)=b(t,x,\phi(t,x,W(t)+C(t,x)))$, $y(t,x)=W(t)+C(t,x)$.

**Глава 3. Численно--аналитическое решение и моделирование поставленных задач.**

Поскольку при определенных условиях выявлена структура решения СДУ в частных производных параболического типа, которая имеет вид $u(s,x)=\varphi(s,x,W(s)+C(s,x))$, то, с точки зрения моделирования решений, достаточно рассматривать уравнения с единичными коэффициентами перед шумом.

В § **3.1** приведен алгоритм моделирования стандартного винеровского процесса.

В § **3.2** рассматривается первая краевая задача вида (1), которая описывает изменение концентрации нейтронов при процессе реакции деления тяжелых ядер с учетом случайных воздействий, и одновременно развитие популяции в случайной среде. Поскольку структура решения имеет вид $\widetilde{u}(t,x,W(t))=\sigma W(t)+C(t,x)$, где неизвестная функция $C(t,x)$ является, в свою очередь, решением первой краевой задачи:

$$\begin{gathered} C'_t(t,x)=DC''_{xx}(t,x)+RC(t,x)+\sigma RW(t), \\ C(0,x)=const, \quad C(t,0)=-W(t), \quad C(t,1)=-W(t), \end{gathered} \tag{11}$$

то предлагается следующий алгоритм решения:

***Алгоритм*.**

1. Моделируется траектория броуновского движения $W(t)$;

2. С помощью метода, описанного во второй главе текущей работы, выводится уравнение (11) в частных производных параболического типа на функцию $C(s,x)$. В этом уравнении отсутствуют слагаемые в виде стохастических интегралов, что позволяет применить классические численные методы для построения его решения;

3. Первая краевая задача для уравнения на функцию $C(s,x)$ решается аналитическими или численными методами. Ниже предложена неявная конечно-разностная схема для построения решения задачи (11);

4. Строится решение исходной первой краевой задачи (1), как функция $\tilde{u}(t,x,W(t)) = \sigma W(t) + C(t,x)$.

Для решения первой краевой задачи (11) используется неявная конечно-разностная схема:

$$\frac{C_{n+1,m} - C_{n,m}}{\tau} = D\frac{C_{n+1,m-1} - 2C_{n+1,m} + C_{n+1,m+1}}{h^2} + RC_{n+1,m} +$$
$$+\sigma RW_{n+1}, \quad n = 0,...,N-1, \quad m = 1,...,M-1,$$
$$C_{0,m} = const, \quad C_{n,0} = -W_n(t), \quad C_{n,M} = -W_n(t).$$

Функция $W_n$ является аппроксимацией $W(t)$.

В § **3.4** рассматривается первая краевая задача вида (2), которая описывает затухание волн в вязкой среде со случайным внешним источником. Решение имеет вид $\tilde{u}(t,x,W(t)) = \sigma W(t) + C(t,x)$, где неизвестная функция $C(t,x)$ является, в свою очередь, решением первой краевой задачи:

$$\begin{gathered} C'_t(t,x) = C''_{xx}(t,x) + (C(t,x) + \sigma W(t))C'_x(t,x), \\ C(0,x) = \sin 2\pi x, \quad C(t,0) = C(t,1) = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Таким образом, первая краевая задача (2) для стохастического уравнения Бюргерса свелась к решению первой краевой задачи (12) для уравнения того же типа, но уже без стохастического интеграла, следовательно, для построения решения исходной задачи, можно применить алгоритм, аналогичный предложенному в предыдущем параграфе.

Для построения численного решения первой краевой задачи (12) используются комплексные гармонические вейвлеты как базисные функции в методе Галеркина. Строится комплекснозначный базис Литтлвуда - Пэйли

$$\psi_k^{j\,per}(x) = \frac{1}{2^{j/2}} \sum_{m_j=2^j}^{2^{j+1}-1} \exp[-2i\pi m_j (x - \frac{k}{2^j})],$$

где $j = 0,...,r$ и $k = 0,...,2^j - 1$, определенный при помощи материнского вейвлета:

$$\psi(x) = \frac{\exp(4i\pi x) - \exp(2i\pi x)}{2i\pi x}.$$

Решение ищется в виде:

$$C(t,x)=\sum_{j=0}^{r}\sum_{k=0}^{2^j-1}a_k^j(t)\psi_k^j(x), \tag{13}$$

Подстановка выражения (13) в уравнение (12), позволяет получить систему уравнений на неизвестные коэффициенты $a_k^j(t)$, которая выражает конечно-пространственное отображение уравнения (12) на пространство вейвлетов. Методом вычислительного эксперимента получена оценка погрешности численного решения. Исследуется поведение решения при изменении коэффициента вязкости и коэффициента шума в уравнении (2).

## Основные результаты работы

1) Разработан новый аналитический метод, с помощью которого решение стохастических дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа, описывающих модели процессов с диффузионными связями и внешними воздействиями в виде случайных флуктуаций, сводится к решению двух классических дифференциальных уравнений, но со случайными коэффициентами. Показано, что этот способ применим к более общему классу стохастических дифференциальных уравнений в частных производных;

2) Выявлена структура решения одного класса стохастических дифференциальных уравнений, которая включает в себя стохастические дифференциальные уравнения параболического типа, описывающие рассматриваемые в работе модели процессов изменения концентрации нейтронов при реакции распада тяжелых ядер, развития популяции в случайной среде и затухания волн в вязкой среде со случайным внешним источником. Определена структура одномерного диффузионного процесса и установлено, что множество стохастических дифференциальных уравнений можно разбить на классы эквивалентности по случайному сносу, а фундаментальные решения соответствующих параболических уравнений можно факторизовать по коэффициенту переноса;

3) Предложен новый способ численно-аналитического решения и моделирования стохастических дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа и стохастических уравнений Бюргерса, который заключается в том, что, опираясь на аналитические результаты работы, исходную задачу можно свести к решению двух обычных дифференциальных уравнений в частных производных, где в качестве коэффициентов или краевых условий при-

сутствует винеровский процесс, и воспользоваться классическими численно-аналитическими методами. Методом вычислительного эксперимента проведена оценка погрешности для численных результатов, полученных для стохастического уравнения Бюргерса.

## ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### В рецензируемых журналах из списка ВАК

1. Квазимера в пространстве C[0,1], порожденная «тепловым» уравнением четвертого порядка / И. Г. Парамошина // Вестник УГАТУ, 2003. Т. 4. № 2. С. 158-163.

2. О структуре одномерного диффузионного процесса / Ф. С. Насыров, И. Г. Парамошина // Вестник УГАТУ, 2006. Т. 7. № 2 (15). С. 127-130.

3. О построении квазимеры в пространстве (C[0,1], B(C[0,1])) / Ф. С. Насыров, И. Г. Парамошина // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2001, Т. 8, выпуск 1. № 7. С. 279-280.

4. Численно - аналитическое решение стохастического уравнения Бюргерса / И. Г. Парамошина // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2008, Т. 15, выпуск 4. № 10. С. 644-645.

### В других изданиях

5. О построении квазимеры на пространстве C[0,1] / Ф. С. Насыров, И. Г. Парамошина // Актуальные проблемы математики. Математические модели современного естествознания: межвуз. сборник. Изд-во УГАТУ, 2002. С. 105-109.

6. О построении квазимеры в пространстве C[0,1] / И. Г. Парамошина // Сборник трудов региональной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике. Изд-во Башкирского университета, 2001. С. 16.

7. О структуре переходных плотностей диффузионного процесса / И. Г. Парамошина // Материалы XIII международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов". Изд-во СП «Мысль», 2006. стр. 104.

8. О структуре двумерного диффузионного процесса / И. Г. Парамошина // Материалы XIV международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов". Изд-во СП «Мысль», 2007. Т. 2. С. 91.

9. О решении одного класса стохастических дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа / И. Г. Парамошина // Материалы XV международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов". Изд-во СП «Мысль», 2008. С. 42.

10. О решении стохастического уравнения Бюргерса / И. Г. Парамошина // Труды участников международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова, 2008. С. 237-239.

**ПАРАМОШИНА Ирина Геннадьевна**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХСЯ ДИФФУЗИОННЫМИ СВЯЗЯМИ И СЛУЧАЙНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ В ВИДЕ БЕЛОГО И ЦВЕТНОГО ШУМОВ**

Специальность 05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 21.11.2008. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать плоская. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 1,0. Усл. кр.-отт 1,0. Уч.-изд.л. 0,9.
Тираж 100 экз. Заказ № 555

ГОУ ВПО Уфимский государственный авиационный технический университет
Центр оперативной полиграфии УГАТУ
450000, Уфа-центр, ул. К. Маркса, 12