На правах рукописи

КОЛЯСНИКОВА Елена Рифовна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (B,S,F)-РЫНКОВ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Уфа – 2010

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики и кибернетики
ГОУ ВПО
«Уфимский государственный авиационный технический университет»

Научный руководитель — д-р физ.-мат. наук, проф.
БРОНШТЕЙН Ефим Михайлович

Официальные оппоненты — д-р физ.-мат. наук, проф.
МЕЛЬНИКОВ Александр Викторович,
факультет математических и статистических наук Университета Альберты (Канада)

д-р физ.-мат. наук, проф.
МУХАМЕТЗЯНОВ Ирик Зирягович,
каф. математики ГОУ ВПО «Уфимский государственный нефтяной технический университет»

Ведущая организация — ГОУ ВПО «Российский университет дружбы народов»

Защита диссертации состоится 28 декабря 2010 г. в 10 часов
на заседании диссертационного совета Д–212.288.06
при Уфимском государственном авиационном техническом университете
по адресу: 450000, г. Уфа, ул. К. Маркса, 12, корп.1

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке университета

Автореферат разослан 24 ноября 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д-р физ.-мат. наук, проф. **БУЛГАКОВА Г. Т.**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность темы

Математическое описание поведения цен рисковых и безрисковых активов привлекло внимание многих исследователей, начиная с 1900 г. (Bachelier L., Samuelson P.A., Cox J.C., Ross S.A., Rubinstein M., Merton R.C., Madan D.B., Hull J., White A., Vasicek O. и др.).

Во второй половине 20 века возникла теория (B,S)-рынков, в которой рассматриваются портфели, состоящие из рискового (акции, валюта) и безрискового (БА) (банковский счет) активов (Harrison J.M., Kreps D.M., Pliska S.R., Dalang R., Morton A., Willinger W., Ширяев А.Н., Мельников А.В. и др.).

Теория (B,S)-рынков получила широкое развитие в работах многих исследователей, в частности, Föllmer H., Leukert P., Sondermann D., Schweizer M., Schäl M., Duffie D., Richardson H.R., Ширяева А.Н., Мельникова А.В., Кабанова Ю.М., Крамкова Д.О., Нагаева А.В., Павлова И.В., Белявского Г.И., Демина Н.С. и других. Модели (B,S)-рынков широко применяются на практике как инструментарий для определения «справедливой» цены опциона.

Общепринятым является анализ моделей (B,S)-рынков с привлечением вероятностного аппарата, при котором используется не физическая, а риск-нейтральная (мартингальная) вероятность, т.е. в основе анализа лежит теория мартингалов. Некоторые авторы элементы теории (B,S)-рынков строили на основе алгебраических и геометрических соображений, не используя методы стохастического анализа.

Ширяев А.Н. считает целесообразным рассмотрение более общих моделей рынков, в частности, с учетом дивидендов, потребления и инвестирования, операционных издержек.

В диссертационной работе исследуется модель рынка, состоящего из акции, безрискового актива и потока платежей ((B,S,F)-рынок), где предусмотрены платежи за займы акции и безрискового актива. Инструменты (B,S,F)-рынка характеризуются следующим образом:

- БА – ликвидный актив, цена которого в любой момент известна заранее (безрисковый);
- акция – ликвидный инструмент, цена которого в любой момент заранее неизвестна (рисковый);

- поток платежей – неликвидный инструмент, платежи (поступления) по которому определены заранее (безрисковый).

В отличие от операционных издержек за покупку-продажу акций, рассмотренных в работах Ширяева А.Н, Мельникова А.В., Кабанова Ю.М. и др., в диссертационной работе рассматривается плата за займы активов (операции типа «короткие продажи – Short Sales»). Подобные операции часто встречаются на практике.

Таким образом, в работе исследуется модель рынка, учитывающая ряд явлений, характерных для рынка ценных бумаг и деятельности инвестора. Тем самым, тематика работы является актуальной.

Цель работы. Целью работы является построение и исследование математических моделей финансовых рынков, состоящих из трех финансовых инструментов – безрискового актива, акции, потока платежей ((B,S,F)-рынок).

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи.

1. Построение математической модели (B,S,F)-рынка при структуре цены акции в виде бинарного дерева с оплатой коротких продаж, определение и исследование полноты и безарбитражности для этого класса рынков.
2. Разработка методов и алгоритмов решения задачи оптимизации кусочно-линейной функции специального вида, заданной на бинарном дереве, и построение на этой основе эффективных алгоритмов вычисления минимальной стоимости исходного портфеля, при которой платежная функция не меньше заданной (верхняя цена хеджирования).
3. Вычисление верхней цены хеджирования и соответствующего ей хеджа, обеспечивающего платежную функцию в терминальных вершинах дерева состояний цены акции не менее заданной с известной вероятностью и минимизирующего стоимость начального портфеля при известных вероятностях переходов из начальной вершины в терминальные на дереве состояний цены акции (квантильное хеджирование).
4. Разработка комплекса программ, реализующего разработанные алгоритмы, экспериментальная проверка эффективности работы предложенных алгоритмов.

Объектом исследования является (B,S,F)-рынок с оплатой коротких продаж. **Предметом исследования** выступают свойства (B,S,F)-рынка и построение хеджирующих стратегий в рассматриваемой модели.

Методы исследования. Исследование полноты и безарбитражности проводилось на основе методов алгебры и геометрии, построение хеджирующей стратегии опирается на методы линейной оптимизации. Расчеты проводились на основе разработанного автором программного комплекса HedgBSF в среде MatLab.

Информационная база исследования включает сгенерированные случайным образом по равномерному закону безарбитражные (B,S,F)-рынки.

На защиту выносятся:

1. Математическая модель бинарного (B,S,F)-рынка с оплатой коротких продаж, условия полноты и безарбитражности подобных рынков (п. 2 Паспорта специальности 05.13.18).
2. Эффективные методы и алгоритмы решения задачи оптимизации кусочно-линейной функции, заданной на бинарном дереве, и построения хеджирующей стратегии (B,S,F)-рынка с минимальной стоимостью начального портфеля (п. 4 Паспорта специальности 05.13.18).
3. Комплекс программ для проведения численного эксперимента по оценке эффективности работы предложенных алгоритмов (п. 5 Паспорта специальности 05.13.18).

Научная новизна

1. *Рассмотрена новая* математическая модель бинарного (B,S,F)-рынка с оплатой коротких продаж, в которой динамика цены акции, в отличие от модели Кокса-Росса-Рубинштейна, описана произвольным бинарным деревом без заданного вероятностного распределения. Для предложенной модели получены условия полноты и безарбитражности на основе методов алгебры и геометрии без привлечения вероятностного аппарата, в частности мартингальной техники.
2. *Разработаны новые методы и алгоритмы* решения задачи оптимизации кусочно-линейной функции специального вида, заданной на бинарном дереве, основанные на построении бинарного дерева задач линейного программирования. На основе предложенных методов и алгоритмов построены верхние хеджирующие стратегии (B,S,F)-рынка с учетом платежей за короткие продажи.

3. Разработан комплекс программ, реализующий новые алгоритмы, которые позволяют *существенно сократить объем вычислений* для определения хеджирующих стратегий по сравнению с переборным алгоритмом.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость заключается в построении и анализе бинарной модели (B,S,F)-рынка с оплатой коротких продаж и формировании эффективных алгоритмов построения хеджирующих стратегий. Метод решения может применяться для решения родственных задач минимизации кусочно-линейных функций специального вида, заданных на бинарном дереве. Практическая значимость заключается в определении величины минимального начального капитала, необходимого для построения хеджирующей стратегии (определение цены платежного обязательства).

Достоверность результатов диссертационной работы обусловлена строгостью математических доказательств и широкомасштабным вычислительным экспериментом.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены и обсуждались на научных семинарах и конференциях, соответствующих профилю диссертации. В частности были сделаны доклады:

1. на третьей всероссийской зимней школе-семинаре аспирантов и молодых ученых (г. Уфа, 20-23 февраля 2008 г.).
2. на 31-й Международной научной школе-семинаре “Системное моделирование социально-экономических процессов” (г. Воронеж, 1-5 октября 2008 г.).
3. на Всероссийской молодежной научной конференции Мавлютовские чтения (г. Уфа, 28-29 октября 2008 г.).
4. на четвертой всероссийской зимней школе-семинаре аспирантов и молодых ученых (г. Уфа, 19-21 февраля 2009 г.).
5. на VIII Международной ФАМ’2009 конференции (г. Красноярск, 24-26 апреля 2009 г.).
6. на V Всероссийской научно-практической конференции “Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий” (г. Сочи, 10-15 мая 2009 г.).

7. на 16 Всероссийской школе-коллоквиуме по стохастическим методам и 10 Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (г. Санкт-Петербург, 19-24 мая 2009 г.).

8. на 21 Международной конференции по системным исследованиям, информатике и кибернетике, ИнтерСимп-2009 (г. Баден-Баден, 3-7 авг. 2009 г.).

9. на 32-й Международной научной школе-семинаре “Системное моделирование социально-экономических процессов” (г. Вологда, 5-10 октября 2009 г.).

10. на пятой всероссийской зимней школе-семинаре аспирантов и молодых ученых (г. Уфа, 17-20 февраля 2010 г.).

Публикации. Список публикаций автора по теме диссертации включает 14 научных трудов, в том числе 4 статьи в рецензируемых научных журналах из списка ВАК, свидетельство об официальной регистрации программного продукта, 4 публикации в трудах международных конференций. Семь публикаций выполнено без соавторов.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, разбитых на параграфы, основных результатов работы, библиографического списка литературы, включающего 163 источника, 1 приложения, содержит 15 таблиц, 32 рисунка. Общий объем работы составляет 189 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение. Во введении обосновывается актуальность работы, сформулированы ее цели и задачи. Кроме этого, дан краткий обзор по тематике вопроса, сформулированы основные результаты, полученные в работе, излагается описание диссертации по главам.

Глава 1. Теория (B,S)-рынков. В данной главе сделан обзор проблем, рассматриваемых в теории (B,S)-рынков. В §1.1 введены основные понятия теории (B,S)-рынков: капитал, портфель, самофинансирование, полнота, безарбитражность, хеджирование, приведены возможные ограничения моделей (B,S)-рынков, сформулированы теоремы Харрисона и Крепса, Харрисона и Плиски, Далланга, Мортона и Виллинджера, устанавливающие полноту и безарбитражность дискретных (B,S)-рынков на основе мартингальных критериев. В §1.2 описаны ценовые модели акции и опционов. Ценообразование опционов является основой методологии хеджирования на (B,S)-рынке. В §1.3 сформулирована задача хеджирования платежных обязательств европейского типа, согласно которой цель инвестора – получить в заранее определенный момент времени N капитал не меньше величины платежного обязательства. Связь данного типа задач с расчетами цены опциона европейского типа была обнаружена Ф. Блэком и М. Шоулзом. В §1.3.1 описаны безарбитражные и полные модели: непрерывная модель Блэка-Шоулза-Мертона и дискретная модель Кокса-Росса-Рубинштейна, а также представлены результаты совершенного хеджирования (хеджирования на полных рынках). В §1.3.2 приводятся методы хеджирования на неполных рынках.

Глава 2. (B,S,F)-рынок и его свойства. В §2.1 строится математическая модель бинарного (B,S,F)-рынка, состоящего из акции, БА, потока платежей ((B,S,F)-рынок) с оплатой за займы активов. Все ценовые значения являются дисконтированными (нормированными). В качестве дисконтирующего актива выбран БА. Таким образом, цена БА в любой момент равна 1. В зависимости от предыстории цена акции принимает одно из двух возможных значений (структура бинарного дерева). Непосредственными наследниками i-й вершины являются вершины с номерами $2i+1$ и $2i+2$. Для каждого момента, кроме нулевого, задан элемент потока платежей (он может принимать значение произвольного знака). Момент времени, соответствующий вершине бинарного дерева i, равен $t(i)=\mathrm{int}(\log_2(i+1))$, цена акции равна C_i, количество акций и БА равно y_i и x_i соответственно, элемент потока платежей в этот момент равен $P_{\mathrm{t(i)}}$. Пусть на множестве терминальных вершин дерева задана *платежная функция* $F_i \geq 0$ $(i=2^n-1,\dots,2^{n+1}-2)$ - априорно известная сумма в случае попадания цены акции в соответствующую вершину дерева, которую инвестор должен обеспечить. Полагаем, что за займы активов предусмотрена плата. При займе x единиц БА следует через единицу времени вернуть λx единиц БА, при займе y акций следует вернуть μy акций ($\lambda \geq 1, \mu \geq 1$).

Введем полезные для дальнейшего вспомогательные переменные u_i, v_i :

$$u_i = y_i \text{ при } y_i \geq 0,\ u_i = \mu y_i \text{ при } y_i \leq 0, \tag{1}$$

$$v_i = x_i \text{ при } x_i \geq 0,\ v_i = \lambda x_i \text{ при } x_i \leq 0 \tag{2}$$

при $i=0,\dots,2^n-2$.

Считаем, что инвестор действует в условиях самофинансирования.

Множество портфелей, определенных в каждой вершине дерева цен акции, называется *самофинансируемым*, если инвестор может покупать, продавать, занимать акции и БА, при этом обеспечивать выплаты (поступления) по потоку платежей таким образом, что стоимость портфеля в каждый момент времени не меняется, т.е. выполняются соотношения

$$v_i + C_{2i+1}u_i + P_{t(i)+1} = x_{2i+1} + C_{2i+1}y_{2i+1}, \qquad (3)$$

$$v_i + C_{2i+2}u_i + P_{t(i)+1} = x_{2i+2} + C_{2i+2}y_{2i+2} \qquad (4)$$

при $i = 0,1,2,...,2^{n-1} - 2.$

В терминальных вершинах дерева должны выполняться равенства:

$$v_i + C_{2i+1}u_i + P_{t(i)+1} = F_{2i+1}, \qquad (5)$$

$$v_i + C_{2i+2}u_i + P_{t(i)+1} = F_{2i+2} \qquad (6)$$

при $i = 2^{n-1} - 1,...,2^n - 2.$

Хедж (хеджирующая стратегия) заданной платежной функции – это совокупность портфелей, определенных во всех вершинах дерева цен акции, обеспечивающая заданную платежную функцию в условиях самофинансирования.

Общее число уравнений в системе нелинейных уравнений (1)-(6) равно $2^{n+2} - 4$ и совпадает с общим числом неизвестных $(x_i, y_i, u_i, v_i,$ где $i = 0,1,...,2^n - 2)$. Построенную модель назовем *(B,S,F)-рынком.*

В §2.2 исследуется полнота описанной модели (B,S,F)-рынка. (B,S,F)-рынок называется *полным*, если существует хедж, обеспечивающий любую заданную платежную функцию. Иначе говоря, *полнота (B,S,F)-рынка означает существование стратегии хеджирования для любой платежной функции.* При заданной платежной функции существование хеджирующей стратегии означает существование решения системы уравнений (1)-(6). Справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Рынок является полным тогда и только тогда, когда* $C_{2i+1} \neq C_{2i+2}$ *при всех i,* где $i = 0,1,...,2^n - 2,$ *при этом хеджирующая стратегия определяется однозначно.*

В §2.3 исследуются условия безарбитражности описанной модели (B,S,F)-рынка. (B,S,F)-рынок называется *безарбитражным,* если при любом потоке платежей невозможно получение гарантированной прибыли. Аналитически это означает, что стоимость портфеля в начальный момент времени с учетом потока платежей положительная $S_0 = x_0 + C_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} P_i > 0$ при наличии положительных компонент в неотрицательной платежной функции, т.е. при $\sum_{i=2^n-1}^{2^{n+1}-2} F_i > 0.$ Тем самым, полнота и безарбитражность являются характеристиками дерева цен акции.

Рынок называется *локально безарбитражным в i-й вершине*, если таков финансовый рынок на единичном временном промежутке с корневой *i*-й вершиной. Условием локальной безарбитражности в *i*-й вершине является неравенство $L_i = x_i + C_i y_i + P_{t(i)+1} > 0$ при $F_{2i+1} \geq 0$, $F_{2i+2} \geq 0$, $F_{2i+1} + F_{2i+2} > 0$, $i = 0, 1, \ldots, 2^n - 2$.

В §2.3.1 получены условия локальной безарбитражности (B,S,F)-рынка при произвольном потоке платежей.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы (B,S,F)-рынок был локально безарбитражным в i-й вершине при любом значении* $P_{t(i)+1}$ *необходимо и достаточно выполнение условия* $C_{2i+2} < C_i < C_{2i+1} \cdot \mu$.

Замечание. Если при каком-нибудь $P_{t(i)+1} < 0$ рынок является локально безарбитражным, то он будет локально безарбитражным при любом другом $P_{t(i)+1}$.

В §2.3.2 получены необходимые условия безарбитражности двухшаговой модели (B,S,F)-рынка с нулевым потоком платежей.

ТЕОРЕМА 3. *Для двухшаговой модели (B,S,F)-рынка при* $P_1 = P_2 = 0$ *из безарбитражности следуют условия:*

1. $C_1\lambda > C_4,\ C_0\lambda > C_2$ или $C_1\lambda < C_4,\ C_0 < C_2\mu.$
2. $C_3\mu > C_1,\ C_0\lambda > C_2$ или $C_3\mu < C_1,\ C_0 < C_2\mu.$
3. $C_2\lambda > C_6,\ C_1\mu > C_0$ или $C_2\lambda < C_6,\ C_1 < C_0\lambda.$
4. $C_5\mu > C_2,\ C_1\mu > C_0$ или $C_5\mu < C_2,\ C_1 < C_0\lambda.$

В §2.3.3 получены необходимые и достаточные условия безарбитражности полного (B,S,F)-рынка без платы за короткие продажи.

ТЕОРЕМА 4. *Полный (B,S,F)-рынок без платы за короткие продажи является безарбитражным тогда и только тогда, когда* $C_{2i+1} > C_i > C_{2i+2}$.

Аналогичные условия для (B,S)-рынка, получены Бронштейном Е.М.

Глава 3. Оптимальное хеджирование. В главе 3 рассматривается задача хеджирования платежных обязательств на (B,S,F)-рынке. Примеры показывают, что в случае безарбитражного рынка при $\lambda>1$, $\mu>1$ стоимость начального портфеля зависит от платежной функции немонотонно. В случае арбитражного рынка немонотонность возможна и при $\lambda=1$, $\mu=1$. Далее рассматриваются только безарбитражные рынки.

Отмеченная немонотонность зависимости стоимости начального портфеля от платежной функции порождает следующую **задачу**: найти стратегию, для которой значения платежной функции (B,S,F)-рынка не меньше заданных во всех терминальных вершинах, с минимальной стоимостью начального портфеля, т.е. в формулировке Ширяева А.Н. требуется найти верхнюю цену хеджирования и соответствующий ей верхний хедж с минимальными начальными расходами.

В этой задаче условия самофинансирования (3)-(4) сохраняются, равенства (5)-(6) заменяются на неравенства:

$$v_i + C_{2i+1}u_i + P_{t(i)+1} \geq F_{2i+1} \tag{7}$$

$$v_i + C_{2i+2}u_i + P_{t(i)+1} \geq F_{2i+2} \tag{8}$$

при $i = 2^{n-1} - 1, \dots, 2^n - 2$. Целевая функция оптимизационной задачи имеет вид:

$$S_0 = x_0 + C_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} P_i \to \min \tag{9}$$

Нелинейная задача (1)-(4),(7)-(9) фактически является совокупностью задач линейного программирования (ЛП). Действительно, добавим к этой задаче в каждой вершине дерева цен акции (i=0,…, 2^n–2) один из четырех наборов дополнительных ограничений:

1. $u_i \leq 0,\, u_i = \mu y_i,\quad v_i \leq 0,\, v_i = \lambda x_i,$ (10)
2. $u_i \leq 0,\, u_i = \mu y_i,\quad v_i \geq 0,\, v_i = x_i,$ (11)
3. $u_i \geq 0,\, u_i = y_i,\quad v_i \leq 0,\, v_i = \lambda x_i,$ (12)
4. $u_i \geq 0,\, u_i = y_i,\quad v_i \geq 0,\, v_i = x_i.$ (13)

В результате получим 4^{2^n-1} задач ЛП. Если какие-нибудь из этих задач имеют решения, то выбрав ту из них, для которой значение целевой функции наименьшее, получим решение задачи (1)-(4),(7)-(9). При таком *переборном подходе* при n=2 необходимо рассмотреть 64 задачи, при n=3 – 16384 задач и т.д.

Оказывается, наличие решения задачи (1)-(4),(7)-(9) связано с безарбитражностью (B,S,F)-рынка.

ТЕОРЕМА 5. *Минимальная стоимость начального портфеля является конечной при любой платежной функции и нулевом потоке платежей тогда и только тогда, когда рынок безарбитражен.*

ТЕОРЕМА 6. *Значение целевой функции задачи* (1)-(4),(7)-(9) *не превосходит* $\max\{F_i\} + 2\sum_{i=1}^{n}(P_i)^+$, *где* $a^+ = (a+|a|)/2,\ i = 2^n - 1,\dots,2^{n+1}-2.$

В §3.1 предлагается точный алгоритм решения задачи (1)-(4),(7)-(9).

Заметим, что из соотношения между величинами x_i и v_i, y_i и u_i следует справедливость равенств:

$$u_i = \min\{y_i, \mu y_i\}, \quad v_i = \min\{x_i, \lambda x_i\}, \text{ где } \mu \ge 1,\ \lambda \ge 1.$$

Используя эти соотношения, рассмотрим следующее семейство ограничений, которые должны выполняться для задачи (1)-(4),(7)-(9):

$$u_i \le y_i,\ u_i \le \mu y_i, \quad v_i \le x_i,\ v_i \le \lambda x_i \quad (i = 0,1,\dots,2^n - 2). \tag{14}$$

Алгоритм 1.

1. Решается задача ЛП (3)-(4),(7)-(9),(14). Она дает оценку минимальной стоимости портфеля снизу. Если в полученном решении для всех i выполняются условия (1)-(2), то получено решение исходной задачи (1)-(4),(7)-(9).

2. Если в какой-нибудь вершине дерева цен акции нарушается какое-нибудь из условий (1)-(2), тогда задача разветвляется на две подзадачи ЛП. Для определенности в i-й вершине нарушено условие (1), тогда к исходным ограничениям задачи добавляются ограничения $u_i \ge 0,\ u_i = y_i$ (для первой подзадачи) и $u_i \le 0,\ u_i = \mu y_i$ (для второй подзадачи) (соответствующее условие из совокупности ограничений (14) для каждой из задач можно исключить). Если для i-й вершины нарушается (2), то задача разветвляется на две аналогичным образом: $v_i \ge 0,\ v_i = x_i$ (для первой подзадачи) и $v_i \le 0,\ v_i = \lambda x_i$ (для второй подзадачи). Если нарушения происходят одновременно по v_i и u_i, то устраняем нарушения по какой-либо из переменных v_i или u_i. В результате получается бинарное дерево задач ЛП.

3. Процесс продолжается пока (1)-(2) не будут выполнены для всех вершин дерева задач или не будет обнаружено, что решения не существует.

4. Выбираем хеджирующую стратегию, обеспечивающую минимальную стоимость портфеля среди всех терминальных вершин дерева задач.

ТЕОРЕМА 7. *Алгоритм 1 приводит к точному решению задачи* (1)-(4),(7)-(9).

Установлено, что значения целевой функции при движении по любому пути дерева задач от начальной вершины не убывают. Вследствие этого алгоритм 1 можно модифицировать следующим образом: если вершины дерева задач просматривать послойно и есть вершина *К*, в которой для соответствующей задачи выполняются равенства (1)-(2), то вершины, в которых значение целевой функции задач ЛП не меньше, чем для *К*, далее можно не рассматривать (**алгоритм 2**).

Описанный алгоритм точного решения задачи построения оптимальной хеджирующей стратегии эффективен только при малых значениях глубины дерева цен акции (не свыше трех). Однако на основе этого алгоритма можно сформировать эффективный алгоритм построения приближенной оптимальной стратегии с заданной оценкой погрешности решения.

В §3.2 предлагается приближенный алгоритм решения задачи (1)-(4),(7)-(9).

Пусть построено некоторое дерево задач. Вершины дерева задач, для которых решение существует, назовем *допустимыми.* Все допустимые вершины дерева задач делятся на два типа: в вершинах первого типа нарушается хотя бы одно из условий (1)-(2), в вершинах второго типа условия (1)-(2) выполняются. Значение целевой функции (9) для вершины дерева задач второго типа является *оценкой минимальной стоимости начального портфеля сверху*, а минимальная из стоимостей начального портфеля для вершин первого типа - *оценкой снизу*. Это следует из отмеченного факта: значения целевой функции для задач из дерева не убывают при переходе к следующим вершинам дерева задач.

Алгоритм 3.

1. См. п.1 алгоритма 1.
2. См. п.2 алгоритма 1 при условии, что разветвление происходит в такой вершине дерева (первого типа), для которой минимальна стоимость начального портфеля.
3. Процесс продолжается до получения вершины второго типа.

4. Вычисляется оценка погрешности приближенного решения: $\varepsilon = 1 - S_0^d / S_0^{up}$, где S_0^d - оценка минимальной стоимости начального портфеля снизу, S_0^{up} - оценка минимальной стоимости начального портфеля сверху.

5. Если оценка погрешности найденного приближенного решения задачи (1)-(4),(7)-(9) велика, то продолжается работа алгоритма (п.2-5).

В §3.4 решается **задача хеджирования с заданной вероятностью (квантильное хеджирование)**: найти самофинансируемую стратегию управления (B,S,F)-рынком, обеспечивающую платежную функцию в терминальных вершинах дерева состояний цены акции не менее заданной с известной вероятностью и минимизирующую стоимость начального портфеля при известных вероятностях переходов из начальной вершины в терминальные на дереве состояний цены акции.

Пусть в задаче (1)-(4),(7)-(9) дополнительно заданы вероятности $p_i \left(i = 2^n - 1, \ldots, 2^{n+1} - 2, \sum_{i=2^n-1}^{2^{n+1}-2} p_i = 1 \right)$ переходов из начальной вершины в терминальные (сценариев возможных стратегий). Допустим задана доверительная вероятность p^*. К условиям (1)-(4),(9) добавляется следующее: совокупность условий (7)-(8) должна выполняться с вероятностью, не меньшей p^*.

Сформулированную задачу можно свести к совокупности задач вида (1)-(4),(7)-(9) следующим образом.

Алгоритм 4.

1. Генерируются максимальные множества $M \subset \{2^n - 1, \ldots, 2^{n+1} - 2\}$, для которых $\sum_{i \in M} p_i \le 1 - p^*$.

2. Для каждого множества M рассматривается задача (1)-(4),(7)-(9), в которой платежная функция имеет вид $F_i^M = 0$ при $i \in M$, $F_i^M = F_i$ при $i \notin M$, где F_i - платежная функция исходной задачи.

3. Среди всех множеств M определяется то, для которого целевая функция решения соответствующей задачи минимальна.

Первая часть этого алгоритма весьма трудоемкая, при большом числе уровней дерева цены акции можно использовать метод ветвей и границ.

Глава 4. Численный эксперимент. В §4.1 описан программный комплекс HedgBSF, разработанный автором в среде MatLab 7 для решения поставленных задач хеджирования. В §4.2 описана методика генерации случайных исходных данных для проведения численного эксперимента и результаты работы алгоритмов.

Численный эксперимент проводился для точных (алгоритмы 1-2) и приближенного (алгоритм 3) алгоритмов. При точных алгоритмах расчеты проводились на временном горизонте n=2,3, при приближенном алгоритме - n=4,…,7.

Для значений временного горизонта n=2,…,6 генерировалось случайно по 1000 (B,S,F)-рынков, для n=7 - 100 (B,S,F)-рынков, для которых решение исходной задачи существует (безарбитражных). Для каждого примера все величины (начальная цена акции в диапазоне [0; 1], коэффициент изменения цены акции в каждой вершине в диапазоне [0,76; 2], элементы потока платежей в диапазоне [-1; 1], элементы платёжной функции в диапазоне [0; 1]) генерировались датчиком псевдослучайных чисел по равномерному закону. Оптимизация осуществлялась с погрешностью установленной MatLab по умолчанию 10^{-8}, сравнения v_i и x_i, u_i и y_i выполнялось с погрешностью 10^{-4}. Для каждого из сгенерированных примеров решалась задача (1)-(4),(7)-(9) при изменении параметров λ и μ от 1,01 до 1,1 с шагом 0,01.

Результаты работы точных алгоритмов. Среднее количество задач ЛП, которое потребовалось решить при разных парах значений λ и μ, при n=2 составило от 1,2 до 2,5 алгоритмами 1 и 2 (при использовании переборного подхода количество задач составляет 64), при n=3 - от 3,7 до 38, 6 задач алгоритмом 1 и от 3,5 до 35, 1 задач алгоритмом 2 (16384 задачи при переборном подходе). С ростом параметров λ и μ среднее число решавшихся задач возрастает. В среднем алгоритм 1 по эффективности уступает алгоритму 2, в то же время, в худших случаях эффективность алгоритмов совпадает.

Результаты работы приближенного алгоритма. Оценка средней погрешности приближенного решения для всех пар λ и μ при n=4,…,7 не превысила 0,0038 (0,38%), 0,0027 (0,27%), 0,0018 (0,18%), 0,0012 (0,12%) соответственно. Среднее количество задач ЛП, которое потребовалось решить при разных парах значений λ и μ, при n=4 составило от 2,8 до 14,3 (при использовании переборного подхода количество задач составляет $1{,}07 \cdot 10^9$), при

n=5 от 5,5 до 36,7 ($4{,}61 \cdot 10^{18}$ при переборном подходе), при n=6 от 14,2 до 84,2 (соответственно $8{,}51 \cdot 10^{37}$), при n=7 от 43,1 до 280,7 (соответственно $2{,}89 \cdot 10^{76}$).

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Построена математическая модель рынка (B,S,F)-модель, отличающаяся тем, что с целью учета практически важных процессов на финансовом рынке, в ней учтены наличие потока платежей и оплата коротких продаж. Установлены некоторые условия полноты и безарбитражности рассматриваемых рынков.
2. Разработаны методы и алгоритмы решения задачи оптимизации кусочно-линейной функции специального вида, заданной на бинарном дереве, и на их основе построены алгоритмы формирования хеджирующей стратегии (B,S,F)-рынка с минимальной стоимостью начального портфеля.
3. Разработан алгоритм вычисления верхней цены хеджирования и соответствующего ей хеджа, обеспечивающего платежную функцию в терминальных вершинах дерева состояний цены акции не менее заданной с известной вероятностью и минимальной стоимостью начального портфеля при известных вероятностях переходов из начальной вершины в терминальные на дереве состояний цены акции.
4. Разработан программный продукт в среде MatLab, реализующий разработанные алгоритмы, которые позволяют существенно сократить объем вычислений для определения хеджирующих стратегий по сравнению с переборным алгоритмом. Проведен вычислительный эксперимент, подтвердивший эффективность предложенных алгоритмов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 07-06-00021, 10-06-00001).

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В рецензируемых журналах из списка ВАК

1. (B,S,F)-рынок и его свойства / Е.М. Бронштейн, Е.Р. Колясникова // Управление риском. 2009. №1. С. 50-64.
2. Хеджирующая стратегия в модели (B,S,F)-рынка / Е.Р. Колясникова // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009 г. Т. 16. В. 3. С. 467-468.

3. Модель (B,S,F)-рынка и хеджирующие стратегии / Е.М. Бронштейн, Е.Р. Колясникова // Управление риском. 2010. №2. С. 55-64.

4. Приближенные хеджирующие стратегии в модели (B,S,F)-рынка / Е.М. Бронштейн, Е.Р. Колясникова // Математическое моделирование. 2010. Т. 22. №11. С. 29-38.

В других изданиях

5. Биномиальная стандартная модель (B,S)-рынка с учетом потока платежей / Е.Р. Колясникова // Актуальные проблемы в науке и технике: сборник статей третьей всероссийской зимней школы-семинара аспирантов и молодых ученых, 20-23 февраля 2008. – Уфа: Изд-во “Диалог”, 2008. Т. 3. С. 68-76.

6. (B,S,F)-рынки / Е.Р. Колясникова // Системное моделирование социально-экономических процессов: труды 31-й Международной научной школы-семинара, Воронеж, 1-5 октября 2008 г.: в 3 ч. / под редакцией В.Г. Гребенникова, И.Н. Щепиной, В.Н. Эйтингона; Воронежский государственный университет.- Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета. 2008 г. С. 138-144.

7. Модель (B,S,F)-рынка / Е.Р. Колясникова // Мавлютовские чтения: Всероссийская молодежная научная конференция: сб. тр. в 5 т. Уфа: УГАТУ, 2008 г. Т. 3. С. 154-156.

8. Алгоритм поиска хеджирующей стратегии для некоторой постановки задачи (B,S,F)-рынка / Е.Р. Колясникова // Актуальные проблемы в науке и технике: сборник трудов четвертой всероссийской зимней школы-семинара аспирантов и молодых ученых, 19-21 февраля 2009 г. – Уфа: Изд-во «Диалог», 2009. Т. 1. С. 281-285.

9. Формирование хеджирующей стратегии в модели (B,S,F)-рынка / Е.М. Бронштейн, Е.Р. Колясникова // VIII международная ФАМ’2009 конференция: тезисы докладов, 24-26 апреля 2009 г. / под ред. к.ф.-м.н. Д.В. Семеновой; Красноярск: СФУ, КГТЭИ, МВМ СО РАН, СИБУП, Издательство “Гротеск”, 2009. С. 64-65.

10. Хеджирование в модели (B,S,F)-рынка / Е.Р. Колясникова // Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий: Материалы V Всероссийской научно-практической конференции,

Сочи, 10-15 мая 2009 г. / Соч. гос. ун-т туризма и курорт. дела; Науч. ред.: И.Л. Макарова, А.Р. Симонян. – Сочи, 2009. С. 42-43.

11. Определение хеджирующей стратегии в модели (B,S,F)-рынка / Е.М. Бронштейн, Е.Р. Колясникова // Труды 21-ой Международной конференция по системным исследованиям, информатике и кибернетике, ИнтерСимп-2009. – Баден-Баден. 2009. С.69-73 (статья на английском языке).

12. Оптимальное хеджирование на (B,S,F)-рынке / Е.М. Бронштейн, Е.Р. Колясникова // Системное моделирование социально-экономических процессов: труды 32-й Международной научной школы-семинара, Вологда, 5-10 октября 2009 г.: в 3 ч. / под редакцией В.Г. Гребенникова, И.Н. Щепиной, В.Н. Эйтингона; Воронежский государственный университет. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета. 2009. С.340-343.

13. Построение самофинансируемой стратегии на (B,S,F)-рынке / Е.Р. Колясникова // Актуальные проблемы науки и техники: сборник трудов пятой всероссийской зимней школы-семинара аспирантов и молодых ученых, 19-21 февраля 2010 г. – Уфа: Изд-во «Диалог», 2010. Т. 1. С. 133-136.

14. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2010612004. Хеджирование на (B,S,F)-рынке / Е.Р. Колясникова. М.: Роспатент, 2010.

КОЛЯСНИКОВА Елена Рифовна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (B,S,F)-РЫНКОВ

Специальность 05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано к печати 23.11.2010. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печать плоская. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 1,0. Усл. кр. – отт. 1,0. Уч.-изд. л. 0,9.
Тираж 100 экз. Заказ № 476.

ГОУ ВПО Уфимский государственный авиационный
технический университет
Центр оперативной полиграфии
450000, Уфа-центр, ул. К. Маркса, 12