

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Башкирский государственный педагогический
университет им. М.Акумулы»

На правах рукописи



МАРТЫНОВА ЮЛИЯ ВАЛЕРЬЕВНА

**ОБРАТНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА
ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ ТИПА «ДЕРЕВО» И ИХ
ПРИЛОЖЕНИЯ**

Специальность:

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы
программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Султанаев Я.Т.

Уфа – 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
Глава 1 Математическая модель частотно-резонансных характеристик в электрической сети на геометрическом графе типа «дерево» и ее свойства	16
1.1 Математическая модель электрических колебаний в единичном проводнике	16
1.2 Математическая модель электрических колебаний в сети в виде графа типа «дерево»	21
1.3 Свойства спектра краевой задачи на графе типа «дерево»	25
1.4 Монотонная зависимость собственных значений краевой задачи на графе от параметров граничных условий	32
Глава 2 Методы решения обратной спектральной задачи по восстановлению параметров граничных условий	38
2.1 Постановка многопараметрической обратной спектральной задачи для оператора в конечномерном пространстве	38
2.2 Редукция к системе прямых спектральных задач	43
2.3 Алгоритм решения, основанный на монотонной зависимости собственных значений от параметров граничных условий	45
Глава 3 Численные эксперименты для модельных случаев	48
3.1 Численный эксперимент для единичного проводника	48
3.2 Численный эксперимент для соединения проводников типа «звезда» ..	60
Заключение	72
Список литературы	73
Приложение	85

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

Методы математического моделирования играют важную роль при исследовании частотно-резонансных характеристик различных технических устройств, описываемых линейными динамическими системами, и вычислительной диагностики технических систем по частотам собственных колебаний. При этом, как правильно, математической моделью служат краевые задачи Штурма – Лиувилля на графах.

В диссертации рассматривается дифференциальный оператор Штурма – Лиувилля, заданный на геометрическом графе типа «дерево», и ставится задача нахождения параметров граничных условий по заданным собственным значениям – обратная спектральная задача. Рассматриваемая задача является математической моделью колебаний электрического тока или напряжения в электрической сети.

Впервые обратная спектральная задача для оператора Штурма – Лиувилля на интервале была поставлена и решена В. А. Амбарцумяном в 1929 году. В дальнейшем теория обратных спектральных задач для оператора Штурма – Лиувилля на интервале получила свое развитие в работах Крейна М. Г., Марченко В. А., Левитана Б. М., Садовниченко В. А., Г. М. Л. Глэдвелла, Муди Т. Чу и других авторов. Прямые спектральные задачи для дифференциальных операторов на графах и их свойства изучались в работах Покорного Ю. В. Обратные спектральные задачи на графах рассматривались в работах Юрко В. А. и его учеников, в них восстанавливались преимущественно коэффициенты дифференциальных операторов с использованием нескольких полных спектров.

Обратные задачи идентификации краевых условий рассматривались в работах Ахтямова А. М. и его учеников. В частности, была рассмотрена задача диагностики закреплений и нагруженности тупиковых вершин геометрического графа из струн и условий заземления электрических сетей по собственным частотам колебаний. Однако, в этих работах для решения задачи по восстановлению параметров требовалось использовать собственных значений больше, чем количество параметров, что означает избыточность данных.

Нами предложен новый метод решения подобных задач, при котором количество восстанавливаемых параметров и количество собственных значений совпадает.

Цель работы

Целью настоящей работы является математическое моделирование частотно-резонансных характеристик в электрической сети на геометрическом графе типа «дерево». Данной модели соответствует обратная спектральная задача по восстановлению параметров граничных условий по конечному набору заданных собственных значений.

В соответствии с поставленной целью формулируются и решаются следующие задачи:

1. Разработать математическую модель колебательных процессов в электрической сети на геометрическом графе типа «дерево» в виде пучка линейных дифференциальных операторов, действующих в гильбертовом пространстве.
2. Исследовать монотонную зависимость собственных значений операторного пучка от параметров граничных условий, на которой базируется разработанный алгоритм решения.
3. Редуцировать поставленную задачу к обратной спектральной задаче для операторов в конечномерном пространстве.
4. Разработать и обосновать алгоритм численного метода решения полученной обратной спектральной задачи для операторов в конечномерном пространстве.
5. Создать комплекс программ, реализующих предложенный алгоритм, позволяющий провести расчет параметров граничных условий по конечному набору заданных собственных значений для единичного проводника и для соединения типа «звезда».

Научная новизна работы

1. Впервые предложен метод математического моделирования колебательных процессов в электрической сети на геометрическом графе типа «дерево» в виде пучка линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Данный метод отличается от известных тем, что позволяет определить m неизвестных параметров граничных условий с помощью ровно m

собственных значений. (п.1 паспорта специальности 05.13.18 – Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений).

2. Разработан и обоснован новый численный алгоритм вычисления параметров граничных условий по конечному набору заданных собственных значений, апробированный на аналитических решениях модельных задач. (п.4 паспорта специальности 05.13.18 – Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента).

3. Разработан комплекс программ, позволяющий провести расчет параметров граничных условий по конечному набору заданных собственных значений для единичного проводника и для соединения типа «звезда», которые могут расширены на любой граф типа «дерево». Проведена проверка адекватности результатов вычислительного эксперимента с помощью сравнения результатов с аналитическими решениями. (п.8 паспорта специальности 05.13.18 – Разработка систем компьютерного и имитационного моделирования).

Теоретическая и практическая значимость результатов

Для математической модели колебательных процессов в электрической сети на геометрическом графе типа «дерево» доказана монотонная зависимость собственных значений от параметров граничных условий, на основе которой строится численный алгоритм вычисления параметров граничных условий по конечному набору заданных собственных значений.

Полученные результаты позволяют восстанавливать параметры граничных условий, например, распределенные индуктивность и емкость, соединенные последовательно, для электрических сетей на геометрическом графе типа «дерево» на участках труднодоступных для визуального осмотра, а также подбирать параметры граничных условий для обеспечения нужного спектра частот колебаний переменного тока или напряжения в сети.

Методы исследования

В диссертационной работе для математической модели колебательных процессов в электрической сети на геометрическом графе типа «дерево» разработан численный метод решения обратной спектральной задачи по восстановлению параметров граничных условий по конечному набору заданных

собственных значений, основанный на доказанном свойстве монотонной зависимости собственных значений от параметров граничных условий. Использовались также методы решения систем нелинейных уравнений, теории дифференциальных уравнений, теории целых функций, теории обратных задач, вычислительной математики, математического анализа, линейной алгебры. Для реализации построенных численно-аналитических алгоритмов использовался математический пакет MATLAB.

Положения диссертации, выносимые на защиту:

1. Математическая модель колебательных процессов в электрической сети на геометрическом графе типа «дерево» с однородными ребрами и граничными условиями в виде пучка линейных дифференциальных операторов, действующих в гильбертовом пространстве.

2. Монотонная зависимость собственных значений операторного пучка от параметров граничных условий, на которой базируется разработанный алгоритм решения.

3. Сведение поставленной задачи к обратной спектральной задаче для операторов в конечномерном пространстве.

4. Алгоритм численного метода решения полученной обратной спектральной задачи для операторов в конечномерном пространстве, основанный на монотонной зависимости собственных значений от параметров граничных условий краевой задачи.

5. Комплекс программ в среде MATLAB для расчета параметров граничных условий по конечному набору заданных собственных значений для единичного проводника и для соединения типа «звезда», которые могут расширены на любой граф типа «дерево».

Достоверность научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, обеспечивается математическими доказательствами теорем, сравнением полученных результатов разработанных численных алгоритмов расчета с аналитическими решениями для модельных задач, а также результатами других авторов.

Публикации

Основные результаты опубликованы в 10 работах, 3 из которых изданы в журналах, входящих в перечень Высшей аттестационной комиссии Мини-

стерства образования и науки Российской Федерации. Получено свидетельство о регистрации электронного ресурса.

Апробация результатов работы

Основные результаты диссертационной работы были представлены и обсуждались на всероссийских и международных конференциях:

- Всероссийская молодежная научно-практическая конференция «Актуальные вопросы науки и образования», Уфа, 25–27 апреля 2013 года;
- Международная научная конференция «Нелинейный анализ и спектральные задачи», Уфа, 18–22 июня 2013 года;
- Международная научная конференция «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ», Уфа, 24–26 сентября 2014 года;
- Международная научная школа «Парадигма», Варна, Республика Болгария, 20-23 августа 2015 года;
- Международная научная конференция «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ», Уфа, 1–3 октября 2015 года;
- Международный научный семинар по обратным и некорректно поставленным задачам, Москва, 19–21 ноября 2015 года;
- Уфимская математическая конференция с международным участием, Уфа, 27–30 сентября 2016 года;
- Научный семинар Института математики с ВЦ УНЦ РАН под руководством д.ф.-м.н., профессора Жибера А. В., д.ф.-м.н., профессора Хабидуллина И. Т.;
- Научный семинар Башкирского государственного университета под руководством д.ф.-м.н., профессора Юмагулова М. Г., д.ф.-м.н., профессора Фазуллина З. Ю.;
- Научный семинар Башкирского государственного педагогического университета под руководством д.ф.-м.н., профессора Султанаева Я. Т.).

Диссертационная работа была выполнена при поддержке грантов РФФИ 12-01-00567а «Качественные методы спектральной теории и их приложения», РФФИ 15-01-01095а «Прямые и обратные задачи спектральной теории дифференциальных операторов», государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации «Асимптотики и спектры в краевых задачах математической физики».

Обзор литературы

Обзор задач технической механики, приводящих к проблеме собственных значений дифференциальных операторов книге представлен в книге [44] Л. Коллатца 1968 года. Важность проблемы собственных значений в технике определяет математическое содержание этой книги. В силу принципиальной общности задачи механического происхождения могут быть соотнесены и с задачами электродинамического происхождения. Основная часть книги посвящена вычислительным методам, математические сведения относятся в основном к теории линейных дифференциальных операторов, хотя функционально-аналитическое понятие оператора прямо и не используется. Кроме того, излагаются вариационные принципы и связанные с ними оценки собственных значений, а также метод Рунге, конечноразностные методы. В случае самосопряженной и полностью определенной общей задачи на собственные значения обоснованы минимальные свойства собственных значений, выявлена аналогия в методах и результатах задач на собственные значения для дифференциальных уравнений и матриц.

В книге Л. С. Понтрягина [76] 1974 года изложена теория дифференциальных уравнений с упором на линейные уравнения с постоянными коэффициентами, с применением этих уравнений к теории электрических цепей. Рассмотрены законы Кирхгофа и правила прохождения электрического тока через простейшие двухполюсники: сопротивление, индуктивность и емкость.

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений находит свои применения в электротехнике и, в частности, радиотехнике. При некоторой идеализации работа радиоприбора может быть математически описана системой обыкновенных дифференциальных уравнений, причем неизвестными функциями времени в этой системе являются величины токов, проходящих через различные детали прибора, или падения напряжения между отдельными узлами прибора. Радиоприборы более наглядно иллюстрируют применение теории обыкновенных дифференциальных уравнений, чем задачи механики. Систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую техническую систему, часто возможно смоделировать и с помощью электрического прибора, а именно, сконструировать такой электрический прибор, работа которого описывается той же системой уравнений, что и техническая

система. Моделирующий электроприбор может помочь при решении системы уравнений, поскольку наблюдение за работой прибора сопоставимо наблюдению за поведением неизвестных функций, удовлетворяющих системе уравнений. Кроме того, физические законы, управляющие работой электроприборов, формулируются достаточно просто. В книге [76] изложены простейшие законы электротехники и приведены несколько примеров применения дифференциальных уравнений к изучению работы электроприборов.

Шкаликовым А. А. в 1982 году в статье [100], были определены различные классы обратных задач для оператора Штурма – Лиувилля высших порядков, содержащие спектральные параметры в краевых условиях, доказаны теоремы полноты, базисности и разложения для системы цепочек, построенных по собственным и присоединенным функциям задачи в специально построенных пространствах.

Монография [103] В. А. Юрко 1989 года посвящена исследованию обратных задач для дифференциальных операторов высших порядков на полуоси и конечном отрезке. В ней были введены функции Вейля, которые наиболее полно отображают спектральные свойства дифференциальных операторов. Использование функций Вейля позволяет построить общую теорию обратных задач для несамосопряженных дифференциальных операторов при произвольном поведении спектра. Для самосопряженных дифференциальных операторов второго порядка введенная в монографии функция Вейля совпадает с классической.

В 1999 году вышла работа [81] В. А. Садовниченко, Я. Т. Султанаева и А. М. Ахтямова, в которой было показано, что для единственности решения обратной задачи Штурма – Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями достаточно использовать спектры исходной задачи и двух вспомогательных задач. С 2004 по 2007 года В. А. Садовничим, Я. Т. Султанаевым и А. М. Ахтямовым были получены результаты по единственности и устойчивости решений обратной задачи Штурма – Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями, опубликованные в работах [82], [84], [86], [87], [88]. Коллективом авторов в 2009 году была издана монография [85], состоящая из трех глав, в которой систематизированы полученные результаты. В третьей главе монографии приведены результаты восстановления краевых условий

задачи Штурма – Лиувилля с известным дифференциальным уравнением. Показано, что существует класс дифференциальных уравнений с параметром, для которых достаточно использовать только один спектр для однозначного восстановления общих краевых условий. Кроме того, рассмотрены теоремы разрешимости, единственности и устойчивости решений обратной задачи восстановления краевых условий задачи Штурма – Лиувилля с известным дифференциальным уравнением. Показаны применения этих теорем в механике, в частности, для диагностики закрепления мембраны по собственным частотам ее колебаний.

В монографии [101] В. А. Юрко 2007 года представлены основные методы решения обратных спектральных задач: метод оператора преобразования, метод спектральных отображений, метод эталонных моделей, метод Борга и другие. В этой монографии имеется параграф, посвященный решению обратной спектральной задачи для дифференциальных операторов Штурма – Лиувилля на компактных графах, в частности на дереве. Большинство работ по спектральной теории на графах посвящено так называемым прямым задачам изучения свойств спектра и корневых функций. Обратные спектральные задачи, в силу их нелинейности, являются более трудными для исследования. Изложенные в монографии [101] постановки обратных спектральных задач являются естественными обобщениями классических обратных задач для операторов Штурма – Лиувилля на интервале. Введены спектральные характеристики, которые однозначно определяют потенциал на графе, изучены их свойства, доказана соответствующие теоремы единственности и предложена конструктивную процедуру решения. Для исследования обратных задач на графах были развиты идеи метода спектральных отображений, полученные результаты верны не только в самосопряженном случае, но также и в несамопряженном, когда потенциал является комплекснозначной функцией на дереве.

Схожие по постановке задачи приведены в монографии [74] Ю. В. Покорного и его учеников 2005 года, в которой проведен анализ процессов в системах, которые можно представить в виде набора одномерных континуумов, взаимодействующих только через концы. Ассоциируя подобную систему в виде пространственной сети, на каждом ее ребре задается уравнение Штурма –

Лиувилля, а в узлах сети, где ребра смыкаются, решения смежных уравнений связаны условиями взаимодействия. Корректная математическая постановка задачи на графах для разных прототипов изначально сопровождалась общим подходом – рассматривать данную задачу как краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений по ребрам при некоторых граничных условиях. Такой подход эффективен в том случае, когда структура сети особой роли не играет, например, при анализе асимптотики спектра, поскольку при таком пореберном подходе основную роль среди краевых условий начинают играть условия трансмиссии, как следствие, при решении задач необходимым является использование матрицы инциденций.

Первые работы по теории дифференциальных уравнений на графах появились в 1980-х годах и были связаны с различными математическими моделями: диффузии [123], распространения нервного импульса [108], [125], упругих сеток [72], распределения электронов в молекуле [64]. В работах [124], [128] обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка на графе рассматривалось как аналог уравнения Лапласа. В работе [72] был исследован спектр простейшей задачи, когда граф является пучком, из k ребер, примыкающих к одной вершине с условиями Дирихле на границе. Был обнаружен эффект кратности собственных значений, причем по всей ширине спектра, описаны собственные функции.

Результаты зарубежных математиков посвящены главным образом обоснованию разрешимости задачи для уравнения Штурма – Лиувилля на графах, исследованию структуры и асимптотики ее спектра и получению оценок резольвенты, что позволило обосновать с помощью общих методов функционального анализа в гильбертовых пространствах существование и единственность решения.

Одна из глав монографии [74] посвящена спектральной теории задачи Штурма – Лиувилля на геометрическом графе, в которой исследуется структура спектра, устанавливаются условия геометрической простоты ведущего собственного значения, оценивается спектральный радиус; изучаются условия корневой алгебраической простоты, что приводит к выделению класса простых задач, например, когда граф является деревом и некоторые решения не имеют нулей во внутренних вершинах; также исследуется спектраль-

ная задача на графе в так называемом «общем положении», показывается вещественность и простота всех точек спектра.

В монографии [33] Г. Глэдвелла 2008 года рассматриваются задачи восстановления незатухающей колебательной системы по заданному характеру колебания и заданным значениям собственных частот или формы колебаний. В классической теории колебаний в основном имеют дело со свободными незатухающими малыми колебаниями различных дискретных или непрерывных систем, которые и рассматриваются в монографии. Одной из основных задач теории колебаний является определение собственных частот и собственных колебаний тела. Объект, моделируемый дискретной системой жестко закрепленных масс, жестких стержней, невесомых пружин или конечно-элементной моделью, описывается матричным обыкновенным дифференциальным уравнением по времени с постоянными коэффициентами. Такое уравнение имеет конечное число собственных значений, а собственным формам колебаний отвечают собственные векторы. Объект, моделируемый непрерывной системой, описывается набором уравнений в частных производных по времени и по одной или несколькими пространственными координатам. Уравнение имеет бесконечное множество собственных значений, а собственные состояния являются собственными функциями пространственных переменных.

В рамках классической теории обратные задачи рассматриваются для построения моделей заданного типа, например: систем масс, связанных пружинами, струн с заданными спектральными параметрами. В монографии [33] не рассматриваются численные методы, а в приложениях наиболее универсальным подходом к решению обратных задач считают метод наименьших квадратов, суть которого состоит в поиске системы, минимизирующей разницу между расчетным и желаемым поведением. Обратные задачи теории колебаний сводятся к построению колебательных систем частного вида, например струна, балка, мембрана, которые характеризуются определенным набором свойств. Сконструированная система должна быть реалистичной: определяющие ее параметры должны быть положительными.

В статье [89] В. А. Садовниченко, Я. Т. Султанаева, Н. Ф. Валеева представлена задача восстановления параметров дифференциального оператора по конечному набору точек спектра, так называемая многопараметрическая

обратная спектральная задача. В качестве источников постановки обратной спектральной задачи можно рассматривать классические обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов, а также прикладные задачи управления характеристиками технических устройств и вычислительной диагностики технических систем по собственным частотам колебаний.

В классической теории обратных спектральных задач известен полный спектр собственных колебаний объекта, поэтому они охватывают не все прикладные задачи восстановления свойств объекта. Например, существуют задачи, в которых требуется найти параметры динамической системы по конечному набору значений собственных колебаний системы, провести идентификацию или диагностику технической системы или придать ей определенные частотно-резонансные характеристики. В таких случаях не полный спектр собственных колебаний объекта, а известна лишь его конечная часть. Такие задачи сводятся к многопараметрическим обратным спектральным задачам для линейных операторов, в которых требуется по конечному числу собственных чисел оператора найти возможные значения неизвестных параметров системы.

Многопараметрическую обратную спектральную задачу можно сформулировать и для задач, в которых требуется идентифицировать вид граничных условий по собственным частотам. Соответствующий пример рассмотрен в статье [89]. Постановка обратной спектральной задачи о восстановлении коэффициентов граничных условий оператора Штурма – Лиувилля $l(y) = y'' - q(x)y + \lambda y$ на отрезке исследована в [24] Валеевым Н. Ф., Рабцевичем С. А. и Нугумановым Э. Р., доказаны теоремы существования и изолированности решений данной задачи, предложен алгоритм численного решения, использующий монотонность зависимости собственных значений от параметров граничных условий.

В работах [19], [20] Н. Ф. Валеева рассматривалась задача восстановления параметров линейного оператора, действующего в конечномерном пространстве, по конечному числу собственных значений. А именно, пусть в n -мерном евклидовом пространстве E^n задано семейство m -параметрических операторов вида:

$$B(\vec{p}; \lambda) = B_0 + p_1 B_1 + \dots + p_m B_m, \quad (1)$$

где $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m) \in \mathbb{C}^m$, линейные операторы $B_k : E^n \rightarrow E^n$ аналитически зависят от спектрального параметра $\lambda \in \mathbb{C}$. При этих условиях число λ называют собственным значением оператора $B(\vec{p}; \lambda)$, если оператор $[B(\vec{p}; \lambda)]^{-1}$ не существует. Необходимо по конечному числу собственных значений восстановить параметры $p_1, p_2, \dots, p_m$.

Основные результаты работы [19] состоят в доказанных теоремах, первая из них теорема существования утверждает, что многопараметрическая обратная спектральная задача разрешима при любых вещественных спектральных данных, а вторая – устанавливает дискретность решений и их количество. В работе [20] предлагается и обосновывается схема решения многопараметрической обратной спектральной задачи, основанная на сведении к задаче о спектре семейства пучков операторов, которая позволяет найти все решения. Последняя задача примечательна тем, что для ее решения существуют эффективные численные методы.

Методы исследования, обсуждаемые в работах [19], [20], близки к идеям, изложенным в работах [107], [111], [113], [114], [118], [120], [129], [130]. В этих работах рассматривают так называемую многоспектральную задачу, эти задачи возникают при разделении переменных в дифференциальных операторах.

Сформулированная постановка обратной спектральной задачи интересна по многим причинам. Прежде всего, многопараметрические обратные спектральные задачи имеют многочисленные приложения в различных отраслях технических наук. Также заметим, что многопараметрические обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов тесно связаны и с классическими обратными спектральными задачами, в частности многопараметрические обратные спектральные задачи можно использовать для разработки численных методов решения обратных спектральных задач. Именно многопараметрические обратные спектральные задачи наиболее адекватно отвечают техническим задачам, возникающим при диагностике различных электромеханических систем по их собственным колебаниям, а также задачам конструирования технических систем с заданными резонансными характеристиками. В частности, многочисленные примеры расчетов собственных колебаний механических систем, зависящих от параметров,

приведены в монографии [44]. Применительно к этим механическим системам можно рассматривать и обратную спектральную задачу о восстановлении неизвестных параметров системы по известному набору частот собственных колебаний. Полное исследование многопараметрических обратных спектральных задач включает вопросы существования, изолированности и устойчивости решений. При этом отдельной проблемой являются численные методы построения этих решений.

ГЛАВА 1 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЧАСТОТНО-РЕЗОНАНСНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ ТИПА «ДЕРЕВО» И ЕЕ СВОЙСТВА

1.1 Математическая модель электрических колебаний в единичном проводнике

Электрической цепью называется совокупность элементов, предназначенных для протекания электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий сила тока I и напряжение U . К числу важнейших элементов, из которых сконструированы электрические приборы, принадлежат сопротивление R , индуктивность L и емкость C . Каждая из этих деталей является двухполюсником, поскольку обладает двумя контактами, которые при монтаже электроприбора присоединяются к полюсам других деталей.

Во время работы электрического прибора через двухполюсник, вмонтированный в него, проходит электрический ток. При этом состояние двухполюсника характеризуется в каждый момент времени двумя величинами: силой тока I и падением напряжения U . Для каждого из трех типов двухполюсника имеются соответствующие соотношения:

- для сопротивления $U = RI$,
- для индуктивности $U = LI_t$,
- для емкости $I = CU_t$.

Первый закон Кирхгофа утверждает, что алгебраическая сумма токов в каждом узле любой цепи равна нулю. Второй закон Кирхгофа (правило напряжений Кирхгофа) гласит, что алгебраическая сумма падений напряжений на всех ветвях, принадлежащих любому замкнутому контуру цепи, равна алгебраической сумме ЭДС ветвей этого контура. Если в контуре нет источников ЭДС (идеализированных генераторов напряжения), то суммарное падение напряжений вдоль замкнутого контура сети равно нулю. Сформулируем законы Кирхгофа применительно к цепям, составленным из описанных выше двухполюсников, соединенных последовательно, а затем параллельно.

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из сопротивления, емкости и индуктивности, соединенных последовательно. При последовательном соединении сила тока постоянна, значит,

$$I_L = I_C = I_R = I,$$

согласно второму закону Кирхгофа для контура без источников ЭДС имеем:

$$U_L + U_C + U_R = 0.$$

Подставляя соответствующие выражения для падения напряжения для каждого из двухполюсников, получим:

$$LI_t + \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau + RI = 0. \quad (1)$$

Продифференцировав по t соотношение (1), получим дифференциальное уравнение колебаний в последовательной RLC -цепи:

$$LCI_{tt} + RC I_t + I = 0. \quad (2)$$

Теперь рассмотрим электрическую цепь, состоящую из сопротивления, емкости и индуктивности, соединенных параллельно. При параллельном соединении падение напряжения постоянно, значит,

$$U_L = U_C = U_R = U,$$

согласно первому закону Кирхгофа имеем:

$$I_L + I_C + I_R = 0.$$

Подставляя соответствующие выражения для силы тока для каждого из двухполюсников, получим:

$$\frac{1}{L} \int_0^t U(\tau) d\tau + CU_t + \frac{U}{R} = 0. \quad (3)$$

Продифференцировав по t соотношение (3), получим дифференциальное уравнение колебаний в параллельной RLC -цепи:

$$LCU_{tt} + \frac{L}{R}U_t + U = 0. \quad (4)$$

Полученные соотношения (2) и (4) понадобятся в дальнейшем для вывода условий заземления проводника.

Прохождение электрического тока по проводнику характеризуется распределенными параметрами: емкостью C , индуктивностью L , сопротивлением R и утечкой G на единицу длины. Рассмотрим баланс заряда в элементе проводника $[x, x + \Delta x]$. Слева в него за время Δt втекает ток $I(x, t)\Delta t$, а справа вытекает $I(x + \Delta x, t)\Delta t$. Разность токов, выходящего из элемента Δx и входящего в него, за время Δt , равная

$$(I(x, t) - I(x + \Delta x))\Delta t \approx -I_x \Delta x \Delta t,$$

идет на зарядку емкости элемента провода

$$C\Delta x dU = C\Delta x[U(x, t + \Delta t) - U(x, t)] = CU_t \Delta x \Delta t$$

и теряется вследствие несовершенства изоляции $GU\Delta x\Delta t$.

Сокращая на $\Delta x\Delta t$, получим уравнение баланса:

$$I_x + CU_t + GU = 0. \quad (5)$$

Применим закон Ома к участку проводника $[x, x + \Delta x]$, по которому протекает ток $I(x, t)$. Падение напряжения $RI\Delta x$ складывается из всех электродвижущих сил, действующих на участке, а именно, из разности потенциалов, взятой с противоположным знаком, поскольку ток течет в направлении, обратном возрастанию U ,

$$-[U(x + \Delta x, t) - U(x, t)] \approx -U_x \Delta x,$$

и ЭДС индукции $LI_t\Delta x$. После сокращения на Δx получим уравнение:

$$U_x + RI + LI_t = 0. \quad (6)$$

Уравнения (5)–(6) называют системой телеграфных уравнений. Из нее можно получить уравнения, содержащие только силу тока или только напряжение.

Продифференцируем обе части уравнения (6) по t и умножим на C :

$$CU_{xt} + CRI_t + CI_{tt} = 0, \quad (7)$$

а обе части уравнения (5) продифференцируем по x :

$$I_{xx} + CU_{xt} + GU_x = 0. \quad (8)$$

Приравнявая выражения (7), (8) и подставляя выражение $U_x = -RI - LI_t$ из телеграфного уравнения (6), получим уравнение в частных производных, содержащее только силу тока:

$$I_{xx} = CLI_{tt} + (RC + GL)I_t + GRI. \quad (9)$$

Теперь продифференцируем обе части уравнения (6) по x :

$$U_{xx} + RI_x + I_{xt} = 0, \quad (10)$$

а обе части уравнения (5) продифференцируем по t и умножим их на L :

$$LI_{xt} + LCU_{tt} + LGU_t = 0. \quad (11)$$

Приравнявая выражения (10), (11) и подставляя выражение $I_x = -GU - CU_t$ из телеграфного уравнения (5), получим уравнение в частных производных, содержащее только напряжение:

$$U_{xx} = CLU_{tt} + (RC + GL)U_t + GRU. \quad (12)$$

Уравнение (9) или аналогичное ему (12) называют телеграфным. Если пренебречь утечкой через изоляцию и активным сопротивлением в силу, например, высоких частот при малой длине проводника, то телеграфное уравнение переходит в простейшее волновое уравнение:

$$U_{xx} = CLU_{tt}. \quad (13)$$

Рассмотрим два типа так называемого заземления через сосредоточенные индукцию и емкость, соединенные последовательно (рисунок 1) и параллельно.

Предположим, что один из концов проводника, уравнение которого имеет вид (13), заземлен через сосредоточенные индукцию L_0 и емкость C_0 , соединенные последовательно. Тогда аналогично (1) разность потенциалов U_x на этом конце провода, взятая с положительным знаком, поскольку ток течет в направлении возрастания U , имеет вид:

$$U_x = L_0 I_t + \frac{1}{C_0} \int_0^t I(\tau) d\tau. \quad (14)$$

Для элемента конца проводника, состоящего из емкости C и индуктивности L справедливо $I = CU_t$, которые подставим в уравнение (14):

$$U_x = L_0 C U_{tt} + \frac{C}{C_0} C U.$$

Отметим, что в правой части последнего выражения содержится не только значение U на конце провода, но и значение U_{tt} , что дает основание ввести два параметра для граничного условия, один из которых $\frac{C}{C_0}$ будет соответствовать сосредоточенной емкости, а другой $L_0 C$ – сосредоточенной индуктивности.

Теперь предположим, что один из концов проводника, уравнение которого имеет вид (13), заземлен через сосредоточенные индукцию L_0 и емкость C_0 , соединенные параллельно. Тогда аналогично (3) сила тока I_x на этом конце провода имеет вид:

$$I_x = \frac{1}{L_0} \int_0^t U(\tau) d\tau + C_0 U_t = 0,$$

или с учетом соотношений $I = CU_t$, $U = LI_t$ для элемента конца проводника:

$$I_x = \frac{1}{L_0} \int_0^t L I_t(\tau) d\tau + C_0 \frac{I}{C} = 0,$$

$$I_x = \left(\frac{L}{L_0} + \frac{C_0}{C} \right) I.$$

Поскольку в правой части последнего выражения содержится только значение I , что дает основание ввести один параметр для граничного условия, которого недостаточно для рассматриваемой в дальнейшем математической модели, то выбор условия заземления остался за последовательным соединением индуктивности и емкости.

Таким образом граничное условие для левого конца проводника имеет вид:

$$U_x(0; t) - L_0 C U_{tt}(0; t) - \frac{1}{C_0} C U(0; t), \quad (15)$$

Аналогично предположим, что правый конец проводника заземлен через индукцию L_1 и емкость C_1 , соединенные последовательно. Для определенности будем считать, что проводник единичной длины. Поскольку ток течет в направлении, обратном направлению возрастания U , то граничное условие для правого конца проводника имеем вид:

$$U_x(1; t) + L_1 C U_{tt}(1; t) + \frac{1}{C_1} C U(1; t) = 0. \quad (16)$$

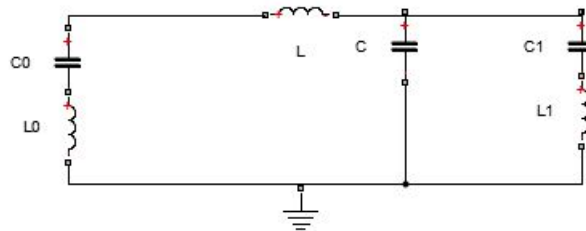


Рисунок 1 – Принципиальная схема для единичного проводника

Таким образом, получили краевую задачу (13), (15), (16) для проводника с распределенной емкостью C и индуктивностью L , заземленного с обоих концов через индуктивность L_i , $i = 0, 1$, и емкость C_i , $i = 0, 1$, соединенные последовательно (рисунок 1).

1.2 Математическая модель колебаний в электрической сети в виде графа типа «дерево»

Рассмотрим электрическую сеть из проводников в виде произвольного графа типа «дерево», который не содержит циклов.

Основной проблемой, связанной с математической формализацией задач на сетях, является объединение процессов на ребрах графа в единое

целое. Одним из подходов является скалярный, соответствующий представлению о расчленении сети в узлах и «выкладыванию» ее ребер в одну линию. Каждое ребро параметризуется своим отрезком $[l_i, l_{i+1}]$ вещественной оси $l_0 < l_1 < \dots < l_N$, где N – число ребер. В результате получается дифференциальное уравнение на отрезке $[l_0, l_N]$, которое задано во всех точках отрезка, кроме точек l_i , в которых оно заменено краевыми условиями.

Для рассматриваемой электрической сети такой подход может быть применен только в том случае, если все проводники в составе сети имеют одинаковые характеристики, в частности, емкость и индуктивность. Тогда на всей сети уравнение колебаний имеет вид (13), а в узлах сети выполняются законы Кирхгофа.

Будем рассматривать более общий случай, когда проводники имеют разные характеристики, и соответствующий векторный подход. Каждое ребро сети параметризуется отрезком $[0; l_i]$, а решения нумеруются в соответствии нумерацией ребер. Набор этих решений образует вектор-функцию, которая удовлетворяет векторному дифференциальному уравнению. Векторный подход, наряду со скалярным, используется и в конструкциях, опирающихся на абстрактные функционально-аналитические результаты: порождающий задачу оператор оказывается заданным либо в прямом произведении пространств, каждое из которых соответствует ребру, либо в пространстве вектор-функций.

На каждом из P линейных фрагментов сети, представляющих собой ребра графа, задается уравнение электрических колебаний в проводнике длиной l_k с распределенными емкостью C_k и индуктивностью L_k :

$$(U_k)_{x_k x_k}(x_k; t) = C_k L_k (U_k)_{tt}, x_k \in (0; l_k), k = \overline{1, P}. \quad (17)$$

Вершину будем называть граничной или висячей, если она принадлежит только одному ребру. Такое ребро называется граничным. Все остальные вершины и ребра называются внутренними.

Пронумеруем граничные вершины графа и соответствующие им ребра от 1 до N . Предположим, k -ый проводник заземлен через сосредоточенные индукцию $\tilde{L}_k$ и емкость $\tilde{C}_k$, соединенные последовательно, причем ток по

этим ребрам течет в направлении, обратном направлению возрастания U_k . Тогда граничные условия могут быть получены аналогично уравнению (16) и имеют вид:

$$(U_k)_{x_k}(l_k; t) + C_k \tilde{L}_k(U_k)_{tt}(l_k; t) + \frac{C_k}{\tilde{C}_k}(U_k)(l_k; t) = 0, k = \overline{1, N}. \quad (18)$$

Конечный связный граф является деревом с P ребрами тогда и только тогда, когда число вершин равно $P + 1$. Поэтому пронумеруем оставшиеся внутренние вершины от $N + 1$ до $P + 1$, причем таким образом, чтобы между i -ой и $(i + 1)$ -ой внутренней вершиной существовало ровно одно ребро – проводник с напряжением $U_i(x_i, t)$, $i = \overline{N + 1, P}$.

В каждой из $M = P + 1 - N$ внутренних вершин задаются условия непрерывности потенциала и условия баланса токов, известные как законы Кирхгофа.

Для внутренней $(N + 1)$ -й вершины, соединенной с D_1 граничными вершинами имеем:

$$\begin{cases} U_1(0; t) = \dots = U_{D_1}(0; t) = U_{N+1}(0; t), \\ \sum_{i=1}^{D_1} (U_i)_{x_i}(0; t) + (U_{N+1})_{x_{N+1}}(0; t) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Для внутренней $(N + j)$ -й вершины, соединенной с D_j граничными вершинами, $j = \overline{2, M - 1}$, имеем:

$$\begin{cases} U_{D_1+\dots+D_{j-1}+1}(0; t) = \dots = U_{D_1+\dots+D_j}(0; t) = \\ = U_{N+j-1}(l_{N+j-1}; t) = U_{N+j}(0; t), \\ \sum_{i=D_1+\dots+D_{j-1}+1}^{D_1+\dots+D_j} (U_i)_{x_i}(0; t) - \\ - (U_{N+j-1})_{x_{N+j-1}}(l_{N+j-1}; t) + (U_{N+j})_{x_{N+j}}(0; t) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Для внутренней $(N + M)$ -й вершины, соединенной с D_M граничными вершинами имеем:

$$\begin{cases} U_{D_1+\dots+D_{M-1}+1}(0; t) = \dots = U_{D_1+\dots+D_M}(0; t) = U_P(l_P; t), \\ \sum_{i=D_1+\dots+D_{M-1}+1}^{D_1+\dots+D_M} (U_i)_{x_i}(0; t) - (U_P)_{x_P}(l_P; t) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Согласно выбранным обозначениям количество внутренних вершин исследуемого графа равно $N = D_1 + \dots + D_M$, тогда получим $D_1 + (D_2 + 1) +$

$+ \dots + (D_{M-1} + 1) + D_M = D_1 + \dots + D_M + M - 2 = N + M - 2 = P - 1$ условий непрерывности потенциала и M условий баланса токов. Таким образом, получаем систему из дифференциальных уравнений (17) с N граничными условиями (18) и $P - 1 + M$ условиями во внутренних вершинах (19)–(21), значит, всего имеем $N + P - 1 + M = 2P$ условий.

От поставленной начально-краевой задачи (17)–(21) перейдем к задаче на собственные значения.

Будем искать собственные колебания динамической системы в виде:

$$U_k(x_k; t) = e^{i\omega t} y_k(x_k), k = \overline{1, P}. \quad (22)$$

Подставим (22) в уравнение (17):

$$y_k''(x_k) + C_k L_k \omega^2 y_k(x_k) = 0, x_k \in (0; l_k), k = \overline{1, P}.$$

Затем подставим в граничные условия (18):

$$y_k'(l_k) + \left(\frac{C_k}{\tilde{C}_k} - C_k \tilde{L}_k \omega^2 \right) y_k(l_k) = 0, k = \overline{1, N}.$$

Введем обозначения:

$$\begin{cases} \lambda = \omega^2 > 0, a_i = \frac{1}{C_i L_i} > 0, \\ p_{i1} = \frac{C_i}{\tilde{C}_i} > 0, p_{i2} = -C_i \tilde{L}_i \frac{\omega^2}{\lambda} = -C_i \tilde{L}_i, i = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (23)$$

Тогда получаем краевую задачу:

$$a_k^2 y_k''(x_k) + \lambda y_k(x_k) = 0, x_k \in (0; l_k), k = \overline{1, P}, \quad (24)$$

с граничными условиями

$$y_k'(l_k) + (p_{k1} + \lambda p_{k2}) y_k(l_k) = 0, k = \overline{1, N}, \quad (25)$$

и условиями во внутренних вершинах:

$$\begin{cases} y_1(0) = \dots = y_{D_1}(0) = y_{N+1}(0), \\ y_{D_1+\dots+D_{j-1}+1}(0) = \dots = y_{D_1+\dots+D_j}(0) = y_{N+j-1}(l_{N+j-1}) = y_{N+j}(0), \\ j = \overline{2, M-1} \\ y_{D_1+\dots+D_{M-1}+1}(0) = \dots = y_{D_1+\dots+D_M}(0) = y_P(l_P). \end{cases} \quad (26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{D_1} y'_i(0) + y'_{N+1}(0) = 0, \\ \sum_{i=D_1+\dots+D_{j-1}+1}^{D_1+\dots+D_j} y'_i(0) - y'_{N+j-1}(l_{N+j-1}) + y'_{N+j}(0) = 0, j = \overline{2, M-1} \\ \sum_{i=D_1+\dots+D_{M-1}+1}^{D_1+\dots+D_M} y'_i(0) - y'_P(l_P) = 0. \end{array} \right. \quad (27)$$

Исходя из физического смысла задачи, коэффициенты $p_{i1}, p_{i2}, i = \overline{1, N}$, должны быть вещественными, более того, $p_{i1} > 0, p_{i2} < 0, i = \overline{1, N}$.

Суть прямой спектральной задачи для краевой задачи (24)–(27) состоит в нахождении собственных значений λ , при которых существуют нетривиальные решения краевой задачи.

Далее рассмотрим спектральные свойства модельной краевой задачи, покажем, что спектр краевой задачи (24)–(27) является дискретным, вещественным и положительным.

1.3 Свойства спектра краевой задачи на графе типа «дерево»

Представим модельную краевую задачу (24)–(27) в специальном пространстве согласно скалярному подходу к задачам на графах.

Обозначим через $H_1 = W_2^1(0; l_1) \times W_2^1(0; l_2) \times \dots \times W_2^1(0; l_P)$ гильбертово пространство элементов вида $\hat{y} = (y_1(x_1), y_2(x_2), \dots, y_P(x_P))$, для которых справедливо выполнение условий (26)–(27), где $y_k(x_k) \in W_2^1(0; l_k)$ – пространство Соболева, состоящее из функций пространства Лебега, суммируемых со второй степенью и имеющих обобщенные производные первого порядка на интервале $(0; l_k)$, а через $H_2 = L_2(0; l_1) \times L_2(0; l_2) \times \dots \times L_2(0; l_P)$ гильбертово пространство элементов вида $\hat{y} = (y_1(x_1), y_2(x_2), \dots, y_P(x_P))$, для которых справедливо выполнение условий (26)–(27), где $y_k(x_k) \in L_2(0; l_k)$ – пространство Лебега, состоящее из суммируемых со второй степенью функций на интервале $(0; l_k)$.

Определим билинейные формы следующим образом:

$$Q_1[\hat{y}, \hat{z}] = \sum_{k=1}^P \int_0^{l_k} y'_k(x_k) \bar{z}'_k(x_k) dx_k + \sum_{k=1}^N p_{k1} y_k(l_k) \bar{z}_k(l_k),$$

$$Q_2[\hat{y}, \hat{z}] = \sum_{k=1}^P \frac{1}{a_k^2} \int_0^{l_k} y_k(x_k) \bar{z}_k(x_k) dx_k - \sum_{k=1}^N p_{k2} y_k(l_k) \bar{z}_k(l_k).$$

Очевидно, что данные билинейные формы являются симметричными.

Кроме того, соответствующие квадратичные $Q_i : H_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$ являются положительно определенными. Действительно,

$$Q_1[\hat{y}, \hat{y}] = \sum_{k=1}^P \int_0^{l_k} |y'_k(x_k)|^2 dx_k + \sum_{k=1}^N p_{k1} |y_k(l_k)|^2 > 0,$$

$$Q_2[\hat{y}, \hat{y}] = \sum_{k=1}^P \frac{1}{a_k^2} \int_0^{l_k} |y_k(x_k)|^2 dx_k - \sum_{k=1}^N p_{k2} |y_k(l_k)|^2 > 0$$

в силу введенных обозначений $p_{i1} > 0$, $p_{i2} < 0$, $i = \overline{1, N}$.

Лемма 1. Квадратичные формы $Q_i : H_1 \rightarrow \mathbb{C}$, $i = 1, 2$, замкнуты в пространстве H_1 .

Доказательство леммы 1. По теореме вложения Соболева

$$W_2^1(0; l_k) \subset C(0; l_k),$$

тогда для соответствующих норм справедливо:

$$\|y_k\|_{W_2^1(0; l_k)} \geq \tilde{w}_k \|y_k\|_{C(0; l_k)}.$$

Тогда для квадратичной формы $Q_1 : H_1 \rightarrow \mathbb{C}$ получим:

$$\begin{aligned} Q_1[\hat{y}, \hat{y}] &= \sum_{k=1}^P \int_0^{l_k} |y'_k(x_k)|^2 dx_k + \sum_{k=1}^N p_{k1} |y_k(l_k)|^2 \geq \sum_{k=1}^P \int_0^{l_k} |y'_k(x_k)|^2 dx_k = \\ &= \sum_{k=1}^P \|y_k\|_{W_2^1(0; l_k)}^2 = q_{11} \|\hat{y}\|_{H_1}^2, q_{11} = const, \\ Q_1[\hat{y}, \hat{y}] &= \sum_{k=1}^P \int_0^{l_k} |y'_k(x_k)|^2 dx_k + \sum_{k=1}^N p_{k1} |y_k(l_k)|^2 \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^P \|y_k\|_{W_2^1(0; l_k)}^2 + \sum_{k=1}^N p_{k1} \|y_k\|_{C(0; l_k)}^2 \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^P \|y_k\|_{W_2^1(0; l_k)}^2 + \sum_{k=1}^N \frac{p_{k1}}{\tilde{w}_k^2} \|y_k\|_{W_2^1(0; l_k)}^2 = q_{12} \|\hat{y}\|_{H_1}^2, q_{12} = const, \end{aligned}$$

Для норм в пространстве Лебега имеет место неравенство:

$$\tilde{l}_k \|y_k\|_{L_2(0;l_k)} \leq \|y_k\|_{C(0;l_k)} \leq \frac{1}{\tilde{w}_k} \|y_k\|_{W_2^1(0;l_k)},$$

тогда для квадратичной формы $Q_2 : H_1 \rightarrow \mathbb{C}$ справедливо:

$$\begin{aligned} Q_2[\hat{y}, \hat{y}] &= \sum_{k=1}^P \frac{1}{a_k^2} \int_0^{l_k} |y_k(x_k)|^2 dx_k - \sum_{k=1}^N p_{k2} |y_k(l_k)|^2 \geq \sum_{k=1}^P \frac{1}{a_k^2} \int_0^{l_k} |y_k(x_k)|^2 dx_k = \\ &= \sum_{k=1}^P \frac{1}{a_k^2} \|y_k\|_{L_2(0;l_k)}^2 = q_{21} \|\hat{y}\|_{H_2}^2, q_{21} = const, \\ Q_2[\hat{y}, \hat{y}] &= \sum_{k=1}^P \frac{1}{a_k^2} \int_0^{l_k} |y_k(x_k)|^2 dx_k - \sum_{k=1}^N p_{k2} |y_k(l_k)|^2 \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^P \frac{1}{a_k^2} \|y_k\|_{L_2(0;l_k)}^2 + \sum_{k=1}^N |p_{k2}| \|y_k\|_{C(0;l_k)}^2 \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^P \frac{\|y_k\|_{W_2^1(0;l_k)}^2}{a_k^2 \tilde{l}_k^2 \tilde{w}_k^2} + \sum_{k=1}^N \frac{|p_{k2}| \|y_k\|_{W_2^1(0;l_k)}^2}{\tilde{l}_k^2 \tilde{w}_k^2} = q_{22} \|\hat{y}\|_{H_2}^2, q_{22} = const. \end{aligned}$$

Пусть $\hat{y}_{(j)}$ – последовательность, сходящая к $\hat{y}$ в пространстве H_1 , тогда

$$\|\hat{y}_{(j)} - \hat{y}\|_{H_i} \rightarrow 0, i = 1, 2.$$

Тогда из неравенств для квадратичных форм

$$q_{11} \|\hat{y}_{(j)} - \hat{y}\|_{H_1} \leq Q_1[\hat{y}_{(j)} - \hat{y}, \hat{y}_{(j)} - \hat{y}] \leq q_{12} \|\hat{y}_{(j)} - \hat{y}\|_{H_1},$$

$$q_{21} \|\hat{y}_{(j)} - \hat{y}\|_{H_2} \leq Q_2[\hat{y}_{(j)} - \hat{y}, \hat{y}_{(j)} - \hat{y}] \leq q_{22} \|\hat{y}_{(j)} - \hat{y}\|_{H_1},$$

следует:

$$Q_i[\hat{y}_{(j)} - \hat{y}, \hat{y}_{(j)} - \hat{y}] \rightarrow 0, i = 1, 2.$$

Таким образом из $\hat{y}_{(j)} \rightarrow \hat{y}$ следует $Q_i[\hat{y}_{(j)} - \hat{y}, \hat{y}_{(j)} - \hat{y}] \rightarrow 0, i = 1, 2$, что является критерием замкнутости квадратичных форм.

Лемма 1 доказана.

Согласно [77] всякая замкнутая полуограниченная квадратичная форма порождается однозначно определенным самосопряженным оператором.

Замкнутые положительные квадратичные формы $Q_1[\hat{y}, \hat{y}]$, $Q_2[\hat{y}, \hat{y}]$ порождены линейными самосопряженными операторами $L_i : H_1 \rightarrow H_2$, $i = 1, 2$, таким образом, что

$$(L_i(\vec{p})\hat{y}, \hat{y}) = Q_i[\hat{y}, \hat{y}], i = 1, 2.$$

Докажем, что краевая задача (24)–(27) может быть записана в виде:

$$L_1(\vec{p})\hat{y} = \lambda L_2(\vec{p})\hat{y}. \quad (28)$$

Для этого воспользуемся следующим фактом.

Лемма 2. Для произвольных $\hat{y}, \hat{z} \in H_1$ справедливо равенство:

$$\sum_{k=1}^P y'_k(0)z_k(0) = \sum_{k=N+1}^P y'_k(l_k)z_k(l_k). \quad (29)$$

Доказательство леммы 2. Поскольку произвольные $\hat{y}, \hat{z} \in H_1$, то для соответствующих y_k, z_k выполняются условия (26)–(27).

Введем обозначения в условиях (26) для z_k :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1 = z_1(0) = \dots = z_{D_1}(0) = z_{N+1}(0), \\ G_j = z_{D_1+\dots+D_{j-1}+1}(0) = \dots = z_{D_1+\dots+D_j}(0) = z_{N+j-1}(l_{N+j-1}) = \\ \quad = z_{N+j}(0), j = \overline{2, M-1} \\ G_M = z_{D_1+\dots+D_{M-1}+1}(0) = \dots = z_{D_1+\dots+D_M}(0) = z_P(l_P). \end{array} \right. \quad (30)$$

Обе части j -го условия (27) для y_k домножим на G_j , $j = \overline{1, M}$, введенных в (30), получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1(\sum_{i=1}^{D_1} (y_i)'(0) + y'_{N+1}(0)) = 0, \\ G_j(\sum_{i=D_1+\dots+D_{j-1}+1}^{D_1+\dots+D_j} y'_i(0) - y'_{N+j-1}(l_{N+j-1}) + y'_{N+j}(0)) = 0, \\ \quad j = \overline{2, M-1} \\ G_M(\sum_{i=D_1+\dots+D_{M-1}+1}^{D_1+\dots+D_M} y'_i(0) - y'_P(l_P)) = 0. \end{array} \right. \quad (31)$$

Внеся G_j , $j = \overline{1, M}$, в скобки и в знак суммы в равенствах (31) и сделав обратную замену (30), получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{D_1} y'_i(0) z_i(0) + y'_{N+1}(0) z_{N+1}(0) = 0, \\ \sum_{i=D_1+\dots+D_j}^{D_1+\dots+D_j} y'_i(0) z_i(0) - y'_{N+j-1}(l_{N+j-1}) z_{N+j-1}(l_{N+j-1}) + \\ + y'_{N+j}(0) z_{N+j}(0) = 0, j = \overline{2, M-1} \\ \sum_{i=D_1+\dots+D_{M-1}+1}^{D_1+\dots+D_M} y'_i(0) z_i(0) - y'_P(l_P) z_P(l_P) = 0. \end{array} \right. \quad (32)$$

Сложим левые и правые части выражений в (32):

$$\sum_{i=1}^{D_1+\dots+D_M} y'_i(0) z_i(0) + \sum_{i=N+1}^P y'_i(0) z_i(0) - \sum_{i=N+1}^P y'_i(l_i) z_i(l_i) = 0.$$

Отсюда следует равенство (29).

Лемма 2 доказана.

Теорема 1. Краевая задача (24)–(27) эквивалентна операторному уравнению (29).

Доказательство теоремы 1.

Пусть $\hat{y}$, λ – решения краевой задачи (24)–(27). Запишем (24) в виде:

$$y''_k(x_k) + \frac{\lambda}{a_k^2} y_k(x_k) = 0, k = \overline{1, P},$$

тогда для произвольного $\hat{z} \in H_1$ справедливо:

$$\sum_{k=1}^P \int_0^{l_k} \left[y''_k(x_k) + \frac{\lambda}{a_k^2} y_k(x_k) \right] z_k(x_k) dx_k = 0. \quad (33)$$

В силу граничного условия (24) для произвольного $\hat{z} \in H_1$ справедливо:

$$\sum_{k=1}^N [y'_k(l_k) + (p_{k1} + \lambda p_{k2}) y_k(l_k)] z_k(l_k) = 0. \quad (34)$$

Для произвольного $\hat{z} \in H_1$ имеет место равенство:

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=1}^P \int_0^{l_k} \left[y''_k(x_k) + \frac{\lambda}{a_k^2} y_k(x_k) \right] z_k(x_k) dx_k + \\ & + \sum_{k=1}^N [y'_k(l_k) + (p_{k1} + \lambda p_{k2}) y_k(l_k)] z_k(l_k) = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Выполнив преобразования (35), получим:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^P \int_0^{l_k} y_k''(x_k) z_k(x_k) dx_k + \sum_{k=1}^N (y_k'(l_k) + p_{k1} y_k(l_k)) z_k(l_k) - \\
& - \lambda \left(\sum_{k=1}^P \int_0^{l_k} \frac{1}{a_k^2} y_k(x_k) z_k(x_k) dx_k + \sum_{k=1}^N (-p_{k2}) y_k(l_k) z_k(l_k) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Применяя интегрирование по частям, имеем:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^P \left(\int_0^{l_k} y_k'(x_k) z_k'(x_k) dx_k - y_k'(x_k) z_k(x_k) \Big|_0^{l_k} \right) + \\
& + \sum_{k=1}^N y_k'(l_k) z_k(l_k) + \sum_{k=1}^N p_{k1} y_k(l_k) z_k(l_k) - \\
& - \lambda \left(\sum_{k=1}^P \int_0^{l_k} \frac{1}{a_k^2} y_k(x_k) z_k(x_k) dx_k - \sum_{k=1}^N p_{k2} y_k(l_k) z_k(l_k) \right) = 0,
\end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^P \int_0^{l_k} y_k'(x_k) z_k'(x_k) dx_k + \sum_{k=1}^P y_k'(0) z_k(0) - \\
& \sum_{k=N+1}^P y_k'(l_k) z_k(l_k) + \sum_{k=1}^N p_{k1} y_k(l_k) z_k(l_k) - \\
& - \lambda \left(\sum_{k=1}^P \int_0^{l_k} \frac{1}{a_k^2} y_k(x_k) z_k(x_k) dx_k - \sum_{k=1}^N p_{k2} y_k(l_k) z_k(l_k) \right) = 0.
\end{aligned}$$

В силу Леммы 2:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^P \int_0^{l_k} y_k'(x_k) z_k'(x_k)^2 dx_k + \sum_{k=1}^N p_{k1} y_k(l_k) z_k(l_k) - \\
& - \lambda \left(\sum_{k=1}^P \int_0^{l_k} \frac{1}{a_k^2} y_k(x_k) z_k(x_k) dx_k - \sum_{k=1}^N p_{k2} y_k(l_k) z_k(l_k) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Подставляя введенные билинейные формы, получим:

$$Q_1[\hat{y}, \hat{z}] - \lambda Q_2[\hat{y}, \hat{z}] = 0,$$

или

$$(L_1(\vec{p})\hat{y} - \lambda L_2(\vec{p})\hat{y}, \hat{z}) = 0.$$

Последнее представляет собой операторное уравнение (28), умноженное скалярно на произвольное $\hat{z}$.

Справедливо и обратное утверждение. Умножим скалярно обе части операторного уравнения (28) на произвольное $\hat{z}$. Выполнив преобразования, изложенные выше в обратном порядке, получим равенство (35).

Полагая $z_k(0) = z_k(l_k) = 0$, справедливы равенства (33)–(34). В силу произвольности z_k из (33) следует (24), а из (34) следует (25).

Теорема 1 доказана.

Спектры краевой задачи (24)–(27) и операторного уравнения (28) также совпадают.

Оператор L_1 согласно Лемме 1 может быть представлен в виде суммы оператора для классической задачи Штурма-Лиувилля

$$(L_{1,0}(\vec{p})\hat{y}, \hat{y}) = \sum_{k=1}^P \int_0^{l_k} (y'_k(x_k))^2 dx_k,$$

резольвента которого $L_{1,0}^{-1}(\vec{p})$ является компактным оператором, и ограниченного оператора

$$(L_{1,1}(\vec{p})\hat{y}, \hat{y}) = \sum_{k=1}^N p_{k1} |y_k(l_k)|^2.$$

Тогда операторное уравнение (28) запишем в виде:

$$\frac{1}{\lambda} (L_{1,0}(\vec{p}) + L_{1,1}(\vec{p}))\hat{y} = L_2(\vec{p})\hat{y},$$

или

$$\frac{1}{\lambda} \hat{y} = (L_{1,0}(\vec{p}) + L_{1,1}(\vec{p}))^{-1} L_2(\vec{p})\hat{y}. \quad (36)$$

Для оператора, записанного в правой части последнего уравнения, справедливо:

$$(L_{1,0}(\vec{p}) + L_{1,1}(\vec{p}))^{-1} L_2(\vec{p}) = L_{1,0}^{-1}(\vec{p}) (I + L_{1,0}^{-1}(\vec{p}) L_{1,1}(\vec{p}))^{-1} L_2(\vec{p}).$$

Поскольку произведение компактного и ограниченного операторов является компактным оператором, в силу положительной определенности опе-

раторов, получим: $L_{1,0}^{-1}(\vec{p})$ – компактный, $L_{1,1}(\vec{p})$ – ограниченный, тогда $L_{1,0}^{-1}(\vec{p})L_{1,1}(\vec{p})$ – компактный, значит, $(I + L_{1,0}^{-1}(\vec{p})L_{1,1}(\vec{p}))^{-1}$ – ограниченный, кроме того, $L_2(\vec{p})$ – ограниченный, тогда оператор $L_1^{-1}(\vec{p})L_2(\vec{p})$ в правой части (36) является компактным.

Откуда следует дискретность спектра операторного уравнения (28), значит, и краевой задачи (24)–(27). Вещественность спектра следует из самосопряженности операторов L_1, L_2 .

Для произвольного собственного значения в силу положительной определенности квадратичных форм справедливо:

$$\lambda = \frac{Q_1[\hat{y}, \hat{y}]}{Q_2[\hat{y}, \hat{y}]} > 0. \quad (37)$$

Таким образом, спектр модельной краевой задачи (24)–(27) представляет собой дискретное множество положительных вещественных чисел. При этом собственные значения λ_k являются аналитическими функциями от параметров граничных условий $p_{11}, \dots, p_{N1}, p_{12}, \dots, p_{N2}$.

Введенные операторы L_1 и L_2 являются положительно определенными. Естественнo ожидать, что следствием этого является монотонная зависимость собственных значений λ_k от соответствующих параметров p_{j1} и p_{j2} , $j = \overline{1, N}$.

1.4 Монотонная зависимость собственных значений краевой задачи на графе от параметров граничных условий

Рассмотрим вопрос о монотонной зависимости собственных значений λ_k , $k = \overline{1, 2N}$ от параметров граничных условий p_{j1} и p_{j2} , $j = \overline{1, N}$ модельной краевой задачи (24)–(27).

Введем в рассмотрение вектор управления $\vec{p} = (p_{11}, \dots, p_{N1}, p_{12}, \dots, p_{N2})$, компонентами которого являются коэффициенты граничных условий модельной краевой задачи.

Под монотонной зависимостью будем понимать знакоопределенность величин

$$\frac{\partial \lambda(\vec{p})}{\partial p_{k1}} \neq 0, \frac{\partial \lambda(\vec{p})}{\partial p_{k2}} \neq 0, k = \overline{1, N}.$$

Теорема 2. Пусть $\lambda = \lambda(\vec{p}) = \lambda(p_{11}, \dots, p_{2N})$ – произвольное собственное значение краевой задачи (24)–(27). Тогда

$$\frac{\partial \lambda(\vec{p})}{\partial p_{k1}} > 0, \frac{\partial \lambda(\vec{p})}{\partial p_{k2}} > 0 \quad (38)$$

в области $p_{k1} > 0$ и $p_{k2} < 0$, $k = \overline{1, N}$.

Доказательство теоремы 2.

Исследуем методами теории возмущений операторное уравнение (28). Зафиксируем набор параметров

$$\vec{p}^* = (p_{11}^*, \dots, p_{N1}^*, p_{12}^*, \dots, p_{N2}^*)$$

и придадим малое возмущение ε одному из первых N параметров

$$\vec{p}_\varepsilon = (p_{11}^*, \dots, p_{i1}^* + \varepsilon, \dots, p_{N1}^*, p_{12}^*, \dots, p_{N2}^*).$$

Если $\varepsilon = 0$, то получим в точности исходную задачу на собственные значения.

Будем искать решение «возмущенной» задачи в виде ряда по степеням ε . Для этого разложим произвольное собственное значение λ и соответствующий собственный вектор $\hat{y}$ в формальные ряды по степеням ε :

$$\lambda = \lambda(0) + \varepsilon \lambda'(0) + \dots = \lambda^{(0)} + \varepsilon \lambda^{(1)} + \dots; \quad (39)$$

$$\hat{y} = \hat{y}^{(0)} + \varepsilon \hat{y}^{(1)} + \dots = \begin{pmatrix} y_1^{(0)}(x_1; \lambda) \\ \dots \\ y_P^{(0)}(x_P; \lambda) \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(x_1; \lambda) \\ \dots \\ y_P^{(1)}(x_P; \lambda) \end{pmatrix} + \dots \quad (40)$$

Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} L_1(\vec{p}_\varepsilon) \hat{y} &= (L_1(\vec{p}^*) + \varepsilon \tilde{B}_i) \hat{y}, \\ L_2(\vec{p}_\varepsilon) \hat{y} &= L_2(\vec{p}^*) \hat{y}, \end{aligned} \quad (41)$$

где

$$(\tilde{B}_i \hat{y}, \hat{y}) = |y_i(l_i)|^2. \quad (42)$$

Учитывая соотношения (39)–(42), операторное уравнение (28) примет вид:

$$(L_1(\vec{p}^*) + \varepsilon \tilde{B}_i)(\hat{y}^{(0)} + \varepsilon \hat{y}^{(1)} + \dots) = (\lambda^{(0)} + \varepsilon \lambda^{(1)} + \dots) L_2(\vec{p}^*)(\hat{y}^{(0)} + \varepsilon \hat{y}^{(1)} + \dots). \quad (43)$$

Приравнивая в уравнении (43) коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим бесконечный набор уравнений:

$$L_1(\vec{p}^*) \hat{y}^{(0)} = \lambda^{(0)} L_2(\vec{p}^*) \hat{y}^{(0)}; \quad (44)$$

$$L_1(\vec{p}^*) \hat{y}^{(1)} + \tilde{B}_i \hat{y}^{(0)} = \lambda^{(0)} L_2(\vec{p}^*) \hat{y}^{(1)} + \lambda^{(1)} L_2(\vec{p}^*) \hat{y}^{(0)}; \quad (45)$$

...

Обе части уравнения (45) скалярно умножим на $\hat{y}^{(0)}$:

$$(L_1(\vec{p}^*) \hat{y}^{(1)}, \hat{y}^{(0)}) + (\tilde{B}_i \hat{y}^{(0)}, \hat{y}^{(0)}) = \lambda^{(0)} (L_2(\vec{p}^*) \hat{y}^{(1)}, \hat{y}^{(0)}) + \lambda^{(1)} (L_2(\vec{p}^*) \hat{y}^{(0)}, \hat{y}^{(0)}). \quad (46)$$

Поскольку операторы L_1 и L_2 самосопряженные и учитывая (44), получим:

$$(L_1(\vec{p}^*) \hat{y}^{(1)}, \hat{y}^{(0)}) = (L_1(\vec{p}^*) \hat{y}^{(0)}, \hat{y}^{(1)}) = \lambda^{(0)} (L_2(\vec{p}^*) \hat{y}^{(0)}, \hat{y}^{(1)}) = \lambda^{(0)} (L_2(\vec{p}^*) \hat{y}^{(1)}, \hat{y}^{(0)}). \quad (47)$$

Тогда уравнение (46) в силу (47) примет вид:

$$(\tilde{B}_i \hat{y}^{(0)}, \hat{y}^{(0)}) = \lambda^{(1)} (L_2(\vec{p}^*) \hat{y}^{(0)}, \hat{y}^{(0)}). \quad (48)$$

Отметим, что

$$(\tilde{B}_i \hat{y}^{(0)}, \hat{y}^{(0)}) = |y_i^{(0)}(l_i)|^2 > 0, \quad (49)$$

поскольку в граничных условиях (25) выполняется $y_i(l_i) \neq 0$ хотя бы для одного $i = \overline{1, N}$.

Докажем это утверждение. Действительно, предположим противное, т.е. пусть $y_i(l_i) = 0$ для всех $i = \overline{1, N}$.

Тогда получаем краевую задачу (24)–(27), в которой граничные условия примут вид:

$$y_k'(l_k) = y_k(l_k) = 0, k = \overline{1, N}; \quad (50)$$

Общее решение k -го уравнения (24) имеет вид:

$$y_k(x_k, \lambda) = A_{k,1} \sin \frac{x_k \sqrt{\lambda}}{a_k} + A_{k,2} \cos \frac{x_k \sqrt{\lambda}}{a_k}, k = \overline{1, P}; \quad (51)$$

Подставим (51) в граничные условия (50):

$$\begin{cases} A_{k,1} \sin \frac{l_k \sqrt{\lambda}}{a_k} + A_{k,2} \cos \frac{l_k \sqrt{\lambda}}{a_k} = 0, k = \overline{1, N}; \\ \frac{\sqrt{\lambda}}{a_k} (A_{k,1} \cos \frac{l_k \sqrt{\lambda}}{a_k} - A_{k,2} \sin \frac{l_k \sqrt{\lambda}}{a_k}) = 0, k = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (52)$$

Решая систему (52), получим:

$$A_{k,1} = A_{k,2} = 0, k = \overline{1, N}. \quad (53)$$

Затем подставим (51) в условия (26):

$$\begin{cases} A_{1,2} = \dots = A_{D_1,2} = A_{N+1,2}; \\ A_{D_1+\dots+D_{j-1}+1,2} = \dots = A_{D_1+\dots+D_j,2} = A_{N+j-1,1} \sin \frac{l_{N+j-1} \sqrt{\lambda}}{a_{N+j-1}} + \\ + A_{N+j-1,2} \cos \frac{l_{N+j-1} \sqrt{\lambda}}{a_{N+j-1}} = A_{N+j,2}, j = \overline{2, M-1}; \\ A_{D_1+\dots+D_{M-1}+1,2} = \dots = A_{D_1+\dots+D_M,2} = A_{P,1} \sin \frac{l_P \sqrt{\lambda}}{a_P} + A_{P,2} \cos \frac{l_P \sqrt{\lambda}}{a_P}; \end{cases} \quad (54)$$

Решая систему (54) и в силу (53), получим:

$$A_{N+j,1} = A_{N+j,2} = 0, j = \overline{1, M-1}. \quad (55)$$

Объединяя (53) и (55), получим

$$A_{k,1} = A_{k,2} = 0, k = \overline{1, P},$$

следовательно,

$$y_k(x_k) \equiv 0, k = \overline{1, P},$$

что, вообще говоря, противоречит наличию колебаний в рассматриваемой системе. Таким образом, доказано неравенство (49).

В силу положительной определенности оператора $L_2(\vec{p}^*)$ и неравенства (49) из (48) следует:

$$\lambda^{(1)} = \frac{\partial \lambda(\vec{p})}{\partial p_{i1}} = \frac{(\tilde{B}_i \hat{y}^{(0)}, \hat{y}^{(0)})}{(L_2(\vec{p}^*) \hat{y}^{(0)}, \hat{y}^{(0)})} > 0$$

для произвольного $i = \overline{1, N}$.

Аналогично докажем монотонную зависимость собственных значений λ_k , $k = \overline{1, 2N}$ от параметров p_{j2} , $j = \overline{1, N}$. Придадим малое возмущение одному из последних N параметров:

$$\vec{p}_\varepsilon = (p_{11}^*, \dots, p_{N1}^*, p_{12}^*, \dots, p_{i2}^* + \varepsilon, \dots, p_{N2}^*), i = \overline{1, N}.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} L_1(\vec{p}_\varepsilon) \hat{y} &= L_1(\vec{p}^*) \hat{y}; \\ L_2(\vec{p}_\varepsilon) \hat{y} &= (L_2(\vec{p}^*) - \varepsilon \tilde{B}_i) \hat{y}, \end{aligned} \quad (56)$$

где оператор $\tilde{B}_i$ определен в (42).

Таким образом, операторное уравнение (28) примет вид:

$$L_1(\vec{p}^*)(\hat{y}^{(0)} + \varepsilon \hat{y}^{(1)} + \dots) = (\lambda^{(0)} + \varepsilon \lambda^{(1)} + \dots)(L_2(\vec{p}^*) - \varepsilon \tilde{B}_i)(\hat{y}^{(0)} + \varepsilon \hat{y}^{(1)} + \dots). \quad (57)$$

Приравнивая в уравнении (57) коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим бесконечный набор уравнений:

$$L_1(\vec{p}^*, \lambda) \hat{y}^{(0)} = \lambda^{(0)} L_2(\vec{p}^*, \lambda) \hat{y}^{(0)}; \quad (58)$$

$$L_1(\vec{p}^*) \hat{y}^{(1)} = \lambda^{(0)} L_2(\vec{p}^*) \hat{y}^{(1)} + \lambda^{(1)} L_2(\vec{p}^*) \hat{y}^{(0)} - \lambda^{(0)} \tilde{B}_i \hat{y}^{(0)}; \quad (59)$$

...

Обе части уравнения (59) скалярно умножим на $\hat{y}^{(0)}$:

$$\begin{aligned} (L_1(\vec{p}^*) \hat{y}^{(1)}, \hat{y}^{(0)}) &= \lambda^{(1)} (L_2(\vec{p}^*) \hat{y}^{(0)}, \hat{y}^{(0)}) + \lambda^{(0)} (L_2(\vec{p}^*) \hat{y}^{(1)}, \hat{y}^{(0)}) - \\ &\quad - \lambda^{(0)} (\tilde{B}_i \hat{y}^{(0)}, \hat{y}^{(0)}). \end{aligned} \quad (60)$$

Поскольку операторы L_1 и L_2 самосопряженные, то имеем соотношение (47), в силу которого уравнение (60) примет вид:

$$\lambda^{(1)} (L_2(\vec{p}^*) \hat{y}^{(0)}, \hat{y}^{(0)}) = \lambda^{(0)} (\tilde{B}_i \hat{y}^{(0)}, \hat{y}^{(0)}). \quad (61)$$

Поскольку $\lambda^{(0)} > 0$ и в силу положительной определенности оператора $L_2(\vec{p}^*)$ и неравенства (49), справедливо:

$$\lambda^{(1)} = \frac{\partial \lambda(\vec{p})}{\partial p_{i2}} = \frac{\lambda^{(0)}(\tilde{B}_i \hat{y}^{(0)}, \hat{y}^{(0)})}{(L_2(\vec{p}^*) \hat{y}^{(0)}, \hat{y}^{(0)})} > 0$$

для произвольного $i = \overline{1, N}$.

Теорема 2 доказана.

Таким образом, доказана монотонная зависимость собственных значений λ_k , $k = \overline{1, 2N}$ модельной краевой задачи от вектора управления (24)–(27) $\vec{p} = (p_{11}, \dots, p_{N1}, p_{12}, \dots, p_{N2})$, компонентами которого являются коэффициенты граничных условий .

ГЛАВА 2 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ПО ВОССТАНОВЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

2.1 Постановка многопараметрической обратной спектральной задачи для оператора в конечномерном пространстве

Будем рассматривать модельную краевую задачу:

$$a_k^2 y_k''(x_k) + \lambda y_k(x_k), x_k \in (0; l_k), k = \overline{1, P}, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$y_k'(l_k) + (p_{k1} + \lambda p_{k2}) y_k(l_k) = 0, k = \overline{1, N}, \quad (2)$$

и условиями в узлах ветвления

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(0) = \dots = y_{D_1}(0) = y_{N+1}(0), \\ y_{D_1+\dots+D_{j-1}+1}(0) = \dots = y_{D_1+\dots+D_j}(0) = y_{N+j-1}(l_{N+j-1}) = y_{N+j}(0), \\ j = \overline{2, M-1} \\ y_{D_1+\dots+D_{M-1}+1}(0) = \dots = y_{D_1+\dots+D_M}(0) = y_P(l_P). \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{D_1} (y_i)'(0) + y_{N+1}'(0) = 0, \\ \sum_{i=D_1+\dots+D_{j-1}+1}^{D_1+\dots+D_j} y_i'(0) - y_{N+j-1}'(l_{N+j-1}) + y_{N+j}'(0) = 0, j = \overline{2, M-1} \\ \sum_{i=D_1+\dots+D_{M-1}+1}^{D_1+\dots+D_M} y_i'(0) - y_P'(l_P) = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

Обратная спектральная задача для краевой задачи (1)–(4) состоит в нахождении вектора $\vec{p} = (p_{11}, \dots, p_{N1}, p_{12}, \dots, p_{N2})$ коэффициентов граничных условий (2), при которых наперед заданные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N}$ являются собственными значениями краевой задачи.

Обозначим через $u_k(x_k; \lambda)$ и $v_k(x_k; \lambda)$, $k = \overline{1, P}$, линейно-независимые решения соответствующего k -го уравнения из (1). Тогда любое решение k -го уравнения можно записать в виде:

$$y_k(x_k; \lambda) = C_1^k(\lambda, \vec{p}) u_k(x_k; \lambda) + C_2^k(\lambda, \vec{p}) v_k(x_k; \lambda), k = \overline{1, P}. \quad (5)$$

Для сокращения записи далее будем рассматривать:

$$y_k(x_k) = C_1^k u_k(x_k) + C_2^k v_k(x_k), k = \overline{1, P}.$$

Подставим фундаментальную систему решений (5) в условия (2)–(4), получим систему из $2P$ уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1^k u'_k(l_k) + C_2^k v'_k(l_k) + (p_{k1} + \lambda p_{k2})(C_1^k u_k(l_k) + C_2^k v_k(l_k)), k = \overline{1, N}; \\ C_1^1 u_1(0) + C_2^1 v_1(0) - C_1^i u_i(0) - C_2^i v_i(0), i = \overline{2, D_1}; \\ C_1^1 u_1(0) + C_2^1 v_1(0) - C_1^{N+1} u_{N+1}(0) - C_2^{N+1} v_{N+1}(0); \\ C_1^{D_1+\dots+D_{j-1}+1} u_{D_1+\dots+D_{j-1}+1}(0) + C_2^{D_1+\dots+D_{j-1}+1} v_{D_1+\dots+D_{j-1}+1}(0) - C_1^i u_i(0) - \\ - C_2^i v_i(0), i = \overline{D_1 + \dots + D_{j-1} + 2, D_1 + \dots + D_j}, j = \overline{2, M}; \\ C_1^{D_1+\dots+D_{j-1}+1} u_{D_1+\dots+D_{j-1}+1}(0) + C_2^{D_1+\dots+D_{j-1}+1} v_{D_1+\dots+D_{j-1}+1}(0) - \\ - C_1^{N+j} u_{N+j}(0) - C_2^{N+j} v_{N+j}(0), j = \overline{2, M-1}; \\ C_1^{D_1+\dots+D_{j-1}+1} u_{D_1+\dots+D_{j-1}+1}(0) + C_2^{D_1+\dots+D_{j-1}+1} v_{D_1+\dots+D_{j-1}+1}(0) - \\ - C_1^{N+j-1} u_{N+j-1}(l_{N+j-1}) - C_2^{N+j-1} v_{N+j-1}(l_{N+j-1}), j = \overline{2, M} \\ \sum_{i=1}^{D_1} (C_1^i u'_i(0) + C_2^i v'_i(0)) + C_1^{N+1} u'_{N+1}(0) + C_2^{N+1} v'_{N+1}(0), \\ \sum_{i=D_1+\dots+D_{j-1}+1}^{D_1+\dots+D_j} (C_1^i u'_i(0) + C_2^i v'_i(0)) + C_1^{N+j} u'_{N+j}(0) + C_2^{N+j} v'_{N+j}(0) - \\ - C_1^{N+j-1} u'_{N+j-1}(l_{N+j-1}) - C_2^{N+j-1} v'_{N+j-1}(l_{N+j-1}), j = \overline{2, M-1} \\ \sum_{i=D_1+\dots+D_{M-1}+1}^{D_1+\dots+D_M} (C_1^i u'_i(0) + C_2^i v'_i(0)) - C_1^P u'_P(l_P) - C_2^P v'_P(l_P). \end{array} \right.$$

Эту систему уравнений можно представить в виде векторно-матричного уравнения:

$$B(\lambda, \vec{p}) \vec{C} = [B_0(\lambda) + \sum_{k=1}^N (p_{k1} B_{k1}(\lambda) + p_{k2} B_{k2}(\lambda))] \vec{C} = 0, \quad (6)$$

где

$$(B_{k1})_{ij}(\lambda) = \begin{cases} u_k(l_k), i = k, j = 2k - 1; \\ v_k(l_k), i = k, j = 2k; \\ 0, \text{ иначе;} \end{cases}$$

$$B_{k2}(\lambda) = \lambda B_{k1}(\lambda), k = \overline{1, P},$$

$$\vec{C} = (C_1^1(\lambda, \vec{p}); C_2^1(\lambda, \vec{p}); \dots; C_1^P(\lambda, \vec{p}); C_2^P(\lambda, \vec{p})).$$

Рассмотрим подробнее блочный вид матрицы $(B_0)_{ij}(\lambda)$:

– для строк с номерами от 1 до N

$$\begin{cases} u'_i(l_i), i = \overline{1, N}, j = 2i - 1; \\ v'_i(l_i), i = \overline{1, N}, j = 2i; \end{cases}$$

– для строк с номерами от $N + 1$ до $N + D_1$:

$$\begin{cases} u_1(0), i = \overline{N + 1, N + D_1}, j = 1; \\ v_1(0), i = \overline{N + 1, N + D_1}, j = 2; \\ -u_k(0), k = \overline{2, D_1}, i = N - 1 + k, j = 2k - 1; \\ -v_k(0), k = \overline{2, D_1}, i = N - 1 + k, j = 2k; \\ -u_{N+1}(0), i = N + D_1, j = 2(N + 1) - 1; \\ -v_{N+1}(0), i = N + D_1, j = 2(N + 1); \end{cases}$$

– для строк с номерами от $N + D_1 + 1$ до $N + D_1 + \dots + D_{M-1} + M - 2$ при $m = \overline{2, M - 1}$:

$$\begin{cases} u_{D_1+\dots+D_{m-1}}(0), i = \overline{N + D_1 + \dots + D_{m-1} - 1, N + D_1 + \dots + D_m - 1}, \\ j = 2(D_1 + \dots + D_{m-1} + 1) - 1; \\ v_{D_1+\dots+D_{m-1}}(0), i = \overline{N + D_1 + \dots + D_{m-1} - 1, N + D_1 + \dots + D_m - 1}, \\ j = 2(D_1 + \dots + D_{m-1} + 1); \\ -u_k(0), k = \overline{D_1 + \dots + D_{m-1} + 2, D_1 + \dots + D_m}, \\ i = N + k + m + 3, j = 2k - 1; \\ -v_k(0), k = \overline{D_1 + \dots + D_{m-1} + 2, D_1 + \dots + D_m}, \\ i = N + k + m + 3, j = 2k; \\ -u_{N+m-1}(l_{N+m-1}), i = N + D_1 + \dots + D_m + m - 2, j = 2(N + m - 1) - 1; \\ -v_{N+m-1}(l_{N+m-1}), i = N + D_1 + \dots + D_m + m - 2, j = 2(N + m - 1); \\ -u_{N+m}(0), i = N + D_1 + \dots + D_m + m - 1, j = 2(N + m) - 1; \\ -v_{N+m}(0), i = N + D_1 + \dots + D_m + m - 1, j = 2(N + m); \end{cases}$$

– для строк с номерами от $N + D_1 + \dots + D_{M-1} + M - 1$ до $N + D_1 + \dots + D_M + M - 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{D_1+\dots+D_{M-1}+1}(0), i = \overline{N + D_1 + \dots + D_{M-1} + M - 1, N + D_1 + \dots + D_M - 2}, \\ \quad j = 2(D_1 + \dots + D_{M-1} + 1) - 1; \\ v_{D_1+\dots+D_{M-1}+1}(0), i = \overline{N + D_1 + \dots + D_{M-1} + M - 1, N + D_1 + \dots + D_M - 2}, \\ \quad j = 2(D_1 + \dots + D_{M-1} + 1); \\ -u_k(0), k = \overline{D_1 + \dots + D_{M-1} + 2, D_1 + \dots + D_M}, \\ \quad i = N + k + M - 3, j = 2k - 1; \\ -v_k(0), k = \overline{D_1 + \dots + D_{M-1} + 2, D_1 + \dots + D_M}, \\ \quad i = N + k + M - 3, j = 2k; \\ -u_{N+M-1}(l_{N+M-1}), i = N + D_1 + \dots + D_M + M - 2, j = 2(N + M - 1) - 1; \\ -v_{N+M-1}(l_{N+M-1}), i = N + D_1 + \dots + D_M + M - 2, j = 2(N + M - 1); \\ - \text{ для строки с номером } N + D_1 + \dots + D_M + M - 1 = 2N + M - 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_k(0), k = \overline{1, D_1}, i = N + D_1 + \dots + D_M + M - 1, j = 2k - 1; \\ v'_k(0), k = \overline{1, D_1}, i = N + D_1 + \dots + D_M + M - 1, j = 2k; \\ u'_{N+1}(0), k = \overline{1, D_1}, i = N + D_1 + \dots + D_M + M - 1, \\ \quad j = 2(N + 1) - 1; \\ v'_{N+1}(0), k = \overline{1, D_1}, i = N + D_1 + \dots + D_M + M - 1, \\ \quad j = 2(N + 1); \end{array} \right.$$

- для строк с номерами от $2N + M$ до $2N + 2M - 3 = 2P - 1$ при $m = \overline{2, M - 1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_k(0), k = \overline{N + D_1 + \dots + D_{m-1}, N + D_1 + \dots + D_m}, \\ \quad i = N + D_1 + \dots + D_M + M - 2 + m, j = 2k - 1; \\ v'_k(0), k = \overline{N + D_1 + \dots + D_{m-1}, N + D_1 + \dots + D_m}, \\ \quad i = N + D_1 + \dots + D_M + M - 2 + m, j = 2k; \\ -u'_{N+m-1}(l_{N+m-1}), i = N + D_1 + \dots + D_M + M - 2 + m, \\ \quad j = 2(N + m - 1) - 1; \\ -v'_{N+m-1}(l_{N+m-1}), i = N + D_1 + \dots + D_M + M - 2 + m, \\ \quad j = 2(N + m - 1); \\ -u'_{N+m}(0), i = N + D_1 + \dots + D_M + M - 2 + m, j = 2(N + m) - 1; \\ -v'_{N+m}(0), i = N + D_1 + \dots + D_M + M - 2 + m, j = 2(N + m); \end{array} \right.$$

- для строки с номером $2P$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_k(0), k = \overline{N + D_1 + \dots + D_{M-1}, N + D_1 + \dots + D_M}, i = 2P, j = 2k - 1; \\ v'_k(0), k = \overline{N + D_1 + \dots + D_{M-1}, N + D_1 + \dots + D_M}, i = 2P, j = 2k; \\ -u'_{N+M-1}(l_{N+M-1}), i = 2P, j = 2(N + M - 1) - 1 = 2P - 1; \\ -v'_{N+M-1}(l_{N+M-1}), i = 2P, j = 2(N + M - 1) - 1 = 2P; \end{array} \right.$$

– остальные элементы рассматриваемой матрицы равны 0.

В монографии В. А. Юрко [101] показано, что определитель системы (6) $\det(B(\lambda, \vec{p}))$ является целой функцией, нули которой совпадают с собственными значениями краевой задачи (1)–(4). Отсюда также следует дискретность спектра краевой задачи (1)–(4).

Сформулируем многопараметрическую обратную спектральную задачу для конечномерного оператора

$$B(\lambda, \vec{p}) = B_0(\lambda) + \sum_{k=1}^N (p_{k1} B_{k1}(\lambda) + p_{k2} B_{k2}(\lambda)), \quad (7)$$

заданного в конечномерном действительном евклидовом пространстве E^{2N} .

Требуется найти всевозможные значения вектора управления $\vec{p} = (p_{11}, \dots, p_{N1}, p_{12}, \dots, p_{N2})$ коэффициентов граничных условий (2), при которых наперед заданные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N}$ являются собственными значениями оператора $B(\lambda, \vec{p})$. При этом набор чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N}$ будем называть спектральными данными и обозначать $\vec{\lambda}$.

Если вектор $\vec{p} = (p_{11}, \dots, p_{N1}, p_{12}, \dots, p_{N2})$ является решением многопараметрической обратной спектральной задачи, то найдутся такие нетривиальные векторы $\vec{q}_j = \vec{q}(\lambda_j) \in E^{2N}$, что

$$B(\lambda_j, \vec{p}) \vec{q}_j = [B_0(\lambda_j) + \sum_{k=1}^N (p_{k1} B_{k1}(\lambda_j) + p_{k2} B_{k2}(\lambda_j))] \vec{q}_j = 0, j = \overline{1, 2N}. \quad (8)$$

Для удобства перенумеруем параметры граничных условий p_{kj} и матрицы B_{kj} , $k = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, 2}$, следующим образом:

$$p_{2k-1} = p_{k1}, p_{2k} = p_{k2}, B_{2k-1} = B_{k1}, B_{2k} = B_{k2}, k = \overline{1, N}.$$

Тогда обратная спектральная задача для исходной краевой задачи (1)–(4) эквивалентна нахождению такого вектора $\vec{p} = (p_1, \dots, p_{2N}) \in R^{2N}$, чтобы каждое из уравнений системы

$$B(\lambda_j, \vec{p})\vec{q}_j = [B_0(\lambda_j) + \sum_{k=1}^{2N} p_k B_k(\lambda_j)]\vec{q}_j = 0, j = \overline{1, 2N} \quad (9)$$

имело хотя бы одно нетривиальное решение $\vec{q}_j \in E^{2N}$.

Однородная система уравнений относительно $\vec{q}_j = \vec{q}(\lambda_j) \in E^{2N}$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю.

Поэтому однородная система (9) эквивалентна системе $2N$ алгебраических уравнений относительно неизвестных $p_1, \dots, p_{2N}$:

$$\det[B(\lambda_j, \vec{p})] = 0, j = \overline{1, 2N}. \quad (10)$$

2.2 Редукция к системе прямых спектральных задач

Прямое исследование существования решений многопараметрической обратной спектральной задачи, их количества и нахождение всех решений для системы (10) в общем случае затруднительны, поскольку полиномиальные уравнения от переменных p_k , $k = \overline{1, 2N}$, имеют сложный вид.

В данном разделе установим связь между многопараметрической обратной спектральной задачей для оператора $B(\lambda, \vec{p})$ и системой прямых спектральных задач, с помощью рассуждений, аналогичных [20].

Обозначим через $H_{2N} = \underbrace{E^{2N} \otimes \dots \otimes E^{2N}}_{2N}$ тензорное произведение $2N$ экземпляров евклидовых пространств E^{2N} . Введем в нем скалярное произведение элементов $\vec{Q} = \vec{q}_1 \otimes \vec{q}_2 \otimes \dots \otimes \vec{q}_{2N} \in H_{2N}$ и $\vec{G} = \vec{g}_1 \otimes \vec{g}_2 \otimes \dots \otimes \vec{g}_{2N} \in H_{2N}$ следующим образом

$$\langle \vec{Q}, \vec{G} \rangle = (\vec{q}_1, \vec{g}_1)(\vec{q}_2, \vec{g}_2) \dots (\vec{q}_{2N}, \vec{g}_{2N}). \quad (11)$$

Пусть Ω – множество всех перестановок чисел $\{1, \dots, 2N\}$, и элемент этого множества $\omega = i_1, \dots, i_{2N} \in \Omega$ такой, что $\omega(k) = i_k$, $k = \overline{1, 2N}$.

Через $I(\omega)$ обозначим количество беспорядков (инверсий) в перестановке ω . Введем в рассмотрение оператор $\Delta_0 : H_{2N} \rightarrow H_{2N}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \sum_{\omega \in \Omega} (-1)^{I(\omega)} B_{\omega(1)}(\lambda_1) \otimes \dots \otimes B_{\omega(2N)}(\lambda_{2N}) = \\ &= \left| \begin{array}{cccc} B_1(\lambda_1) & B_2(\lambda_1) & \dots & B_{2N}(\lambda_1) \\ B_1(\lambda_2) & B_2(\lambda_2) & \dots & B_{2N}(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_1(\lambda_{2N}) & B_2(\lambda_{2N}) & \dots & B_{2N}(\lambda_{2N}) \end{array} \right|_{\otimes}. \end{aligned} \quad (12)$$

Теперь заменяя $B_k(\lambda_j)$ на $B_0(\lambda_j)$ в формуле (12), определим операторы $\Delta_k : H_{2N} \rightarrow H_{2N}$, $k = \overline{1, 2N}$, которые в развернутой форме имеют вид:

$$\Delta_k = \left| \begin{array}{cccccc} B_1(\lambda_1) & \dots & B_{k-1}(\lambda_1) & B_0(\lambda_1) & B_{k+1}(\lambda_1) & \dots & B_{2N}(\lambda_1) \\ B_1(\lambda_2) & \dots & B_{k-1}(\lambda_2) & B_0(\lambda_2) & B_{k+1}(\lambda_2) & \dots & B_{2N}(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_1(\lambda_{2N}) & \dots & B_{k-1}(\lambda_{2N}) & B_0(\lambda_{2N}) & B_{k+1}(\lambda_{2N}) & \dots & B_{2N}(\lambda_{2N}) \end{array} \right|_{\otimes}. \quad (13)$$

Указанные выше операторы строятся по правилу обычного числового определителя, но вместо обычного умножения берется операция тензорного произведения операторов и в каждом тензорном произведении операторы строго следуют расположению в соответствующем столбце.

В терминах этих операторов задачу построения решений многопараметрической обратной спектральной задачи можно свести к системе прямых спектральных задач вида:

$$(\Delta_k + (-1)^k p_k \Delta_0) \vec{Q} = 0, k = \overline{1, 2N}. \quad (14)$$

Совместным решением системы (14) являются векторы $\vec{p} = (p_1, \dots, p_{2N})$ и $\vec{Q} = \vec{q}_1 \otimes \dots \otimes \vec{q}_{2N}$.

Система (14) содержит неизвестный тензор $\vec{Q} \in H_{2N}$, поэтому она не всегда равносильна системе алгебраических уравнений вида:

$$\det(\Delta_k + (-1)^k p_k \Delta_0) = 0, k = \overline{1, 2N}, \quad (15)$$

например, в случае, когда (15) тождественно выполняется для всех p_k , $k = \overline{1, 2N}$.

В этом случае будем рассматривать возмущенную систему совместных спектральных задач:

$$(\Delta_k(\varepsilon) + (-1)^k p_k \Delta_0(\varepsilon)) Q(\vec{\varepsilon}) = 0, k = \overline{1, 2N}, \quad (16)$$

где

$$\Delta_0(\varepsilon) = \begin{vmatrix} B_1(\lambda_1) + \varepsilon I & B_2(\lambda_1) & \dots & B_{2N}(\lambda_1) \\ B_1(\lambda_2) & B_2(\lambda_2) + \varepsilon I & \dots & B_{2N}(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_1(\lambda_{2N}) & B_2(\lambda_{2N}) & \dots & B_{2N}(\lambda_{2N}) + \varepsilon I \end{vmatrix}_{\otimes}.$$

$$\Delta_k(\varepsilon) = \begin{vmatrix} B_1(\lambda_1) + \varepsilon I & \dots & B_0(\lambda_1) - \varepsilon J & B_{k+1}(\lambda_1) & \dots & B_{2N}(\lambda_1) \\ B_1(\lambda_2) & \dots & B_0(\lambda_2) - \varepsilon J & B_{k+1}(\lambda_2) & \dots & B_{2N}(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_1(\lambda_{2N}) & \dots & B_0(\lambda_{2N}) - \varepsilon J & B_{k+1}(\lambda_{2N}) & \dots & B_{2N}(\lambda_{2N}) + \varepsilon I \end{vmatrix}_{\otimes}.$$

Поскольку существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для $\forall \varepsilon, |\varepsilon| > \varepsilon_0$, выполняется $\det(\Delta_0(\varepsilon)) \neq 0$, то система (16) эквивалентна системе алгебраических уравнений вида

$$\det(\Delta_k(\varepsilon) + (-1)^k p_k \Delta_0(\varepsilon)) = 0, k = \overline{1, 2N}. \quad (17)$$

Таким образом, можно свести обратную спектральную задачу для краевой задачи (1)–(4) к системе прямых спектральных задач для операторных пучков вида (14) или (16). Данные системы являются более удобными для разработки численных методов решения.

2.3 Алгоритм решения, основанный на монотонной зависимости собственных значений от параметров граничных условий

В данном разделе построим численно решения многопараметрической обратной спектральной задачи для оператора $B(\lambda, \vec{p})$ в конечномерном евклидовом пространстве E^{2N} . Алгоритм построения решений основан на монотонной зависимости собственных значений от параметров граничных условий и является аналогом метода деления отрезка пополам.

Введем в рассмотрение параллелепипед

$$[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi} = \{\vec{x} \in R^{2N} : a_k \leq x_k \leq b_k\}.$$

Обозначим через $\mu_1(\vec{p}), \mu_2(\vec{p}), \dots, \mu_{2N}(\vec{p})$ собственные значения оператора $B(\lambda, \vec{p})$ при некотором значении вектора $\vec{p} \in [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}$.

Функция $\vec{\mu}(\vec{p}) = (\mu_1(\vec{p}), \mu_2(\vec{p}), \dots, \mu_{2N}(\vec{p})) : \Pi \rightarrow \Pi$ обладает свойствами непрерывной дифференцируемости $\vec{\mu}(\vec{p}) \in C^1(\Pi)$ и монотонности

$$\frac{\partial \mu_j(\vec{p})}{\partial p_k} > 0, k = \overline{1, 2N}, j = \overline{1, 2N}.$$

Областью несуществования решений многопараметрической обратной спектральной задачи для заданных спектральных данных $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N}) \in R^{2N}$ будем называть область, в которой нет вектора $\vec{p} \in R^{2N}$ такого, что $\vec{\mu}(\vec{p}) = \vec{\lambda}$.

В силу монотонности функции $\vec{\mu}(\vec{p})$ справедлива следующая лемма.

Лемма 3. Если $\vec{\lambda} \notin [\vec{\mu}(\vec{a}), \vec{\mu}(\vec{b})]_{\Pi}$, то параллелепипед $[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}$ является областью несуществования решений многопараметрической обратной спектральной задачи для заданных спектральных данных.

Описание алгоритма

Определим параллелепипед, в котором будем искать решения многопараметрической обратной спектральной задачи $[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}$

Возьмем точку $\vec{c} \in [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}$, которая будет являться центром параллелепипеда. Поскольку у $2N$ -мерного параллелепипеда 2^{2N} вершины, то можно сформировать 2^{2N} подобластей $[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}^{(i)}$, $i = \overline{1, 2^{2N}}$ таких, что

$$\bigcap_{i=1}^{2^{2N}} [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}^{(i)} = \vec{c}, \bigcup_{i=1}^{2^{2N}} [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}^{(i)} = [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}.$$

Далее в каждом параллелепипеде $[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}^{(i)}$, $i = \overline{1, 2^{2N}}$ проверим выполнение условия $\vec{\lambda} \notin [\vec{\mu}(\vec{a}), \vec{\mu}(\vec{b})]_{\Pi}^{(i)}$. Если условие выполняется, то рассматриваемый параллелепипед не содержит решений, если же условие не выполняется, то по вышеописанной схеме выполняем его разбиение и переходим к следующему параллелепипеду.

Продолжив данную процедуру конечное число раз, получим локализацию областей существования решения с любой необходимой точностью ε . Применяя итерационный метод для каждой локализованной области существования, можно уточнить решения поставленной задачи до требуемой точности.

Основное достоинство метода — он гарантированно сходится для любых непрерывных функций. Кроме того, данный алгоритм может быть распараллелен. На каждой итерации происходит уменьшение интервала неопределенности $[\vec{a}, \vec{b}]_K$ в 2^{2N} раз, тогда за j шагов интервал неопределенности уменьшится в 2^{2Nj} раз. При этом для количества шагов метода j справедливо:

$$\begin{aligned}\frac{\|\vec{b} - \vec{a}\|}{2^{2Nj}} &< \varepsilon, \\ 2Nj &\geq \log_2 \frac{\|\vec{b} - \vec{a}\|}{\varepsilon}, \\ j &\geq \log_{2^{2N}} \frac{\|\vec{b} - \vec{a}\|}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

ГЛАВА 3 ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ДЛЯ МОДЕЛЬНЫХ СЛУЧАЕВ

3.1 Численный эксперимент для единичного проводника

Рассмотрим уравнение электрических колебаний проводника единичной длины с распределенной емкостью C и индуктивностью L :

$$U_{xx}(x; t) = CLU_{tt}(x; t), x \in (0; 1), \quad (1)$$

заземленного с левого через индукцию L_0 и емкость C_0 , соединенные последовательно, а с правого – через индукцию L_1 и емкость C_1 , соединенные последовательно:

$$\begin{cases} U_x(0; t) - L_0 CU_{tt}(0; t) - \frac{1}{C_0} CU(0; t) = 0, \\ U_x(1; t) + L_1 CU_{tt}(1; t) + \frac{1}{C_1} CU(1; t) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Будем искать собственные колебания проводника в виде:

$$U(x; t) = e^{i\omega t} y(x).$$

Тогда задача (1)–(2) примет вид:

$$y''(x) + CL\omega^2 y(x) = 0, x \in (0; 1),$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} y'(0) - (\frac{C}{C_0} - CL_0\omega^2)y(0) = 0, \\ y'(1) + (\frac{C}{C_1} - CL_1\omega^2)y(1) = 0. \end{cases}$$

Введем обозначения согласно физическому смыслу задачи:

$$\begin{cases} \lambda = CL\omega^2 > 0, \\ p_1 = \frac{C}{C_0} > 0, p_2 = -\frac{CL_0\omega^2}{\lambda} = -\frac{L_0}{L} < 0, \\ p_3 = \frac{C}{C_1} > 0, p_4 = -\frac{CL_1\omega^2}{\lambda} = -\frac{L_1}{L} < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Таким образом, имеем краевую задачу:

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, x \in (0; 1), \quad (4)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} y'(0) - (p_1 + \lambda p_2)y(0) = 0, \\ y'(1) + (p_3 + \lambda p_4)y(1) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Суть прямой спектральной задачи для краевой задачи (4)–(5) состоит в нахождении таких значений параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения краевой задачи. Покажем, что собственные значения краевой задачи (4)–(5) являются вещественными и положительными.

В гильбертовом пространстве $W_2^1(0; 1)$ введем симметричные билинейные формы следующим образом:

$$Q_1[y, z] = \int_0^1 y'(x)\bar{z}'(x)dx + p_1y(0)\bar{z}(0) + p_3y(1)\bar{z}(1),$$

$$Q_2[y, z] = \int_0^1 y(x)\bar{z}(x)dx - p_2y(0)\bar{z}(0) - p_4y(1)\bar{z}(1),$$

где $y(x), z(x) \in W_2^1(0; 1)$.

Кроме того, квадратичные формы $Q_1[y, y]$, $Q_2[y, y]$, порожденные из соответствующих билинейных, в силу введенных обозначений (3) являются положительно определенными:

$$Q_1[y, y] = \int_0^1 [y'(x)]^2 dx + p_1y^2(0) + p_3y^2(1) > 0,$$

$$Q_2[y, y] = \int_0^1 y^2(x)dx - p_2y^2(0) - p_4y^2(1) > 0.$$

Покажем, что введенные билинейные формы являются замкнутыми. Действительно, по теореме вложения Соболева $W_2^1(0; 1) \subset C(0; 1) \subset L_2(0; 1)$ тогда для соответствующих норм справедливо:

$$\tilde{l}\|y\|_{L_2(0;1)} \leq \|y\|_{C(0;1)} \leq \frac{1}{\tilde{w}}\|y\|_{W_2^1(0;1)}.$$

В силу неравенств для норм получим:

$$Q_1[y, y] = \int_0^1 |y'(x)|^2 dx + p_1|y(0)|^2 + p_3|y(1)|^2 \geq \|y\|_{W_2^1(0;1)}^2 = q_{11}\|y\|_{W_2^1(0;1)}^2,$$

$$Q_1[y, y] = \int_0^1 |y'(x)|^2 dx + p_1|y(0)|^2 + p_3|y(1)|^2 \leq \|y\|_{W_2^1(0;1)}^2 +$$

$$\begin{aligned}
& +p_1\|y\|_{C(0;1)}^2 + p_3\|y\|_{C(0;1)}^2 \leq \left(1 + \frac{p_1}{\tilde{w}^2} + \frac{p_3}{\tilde{w}^2}\right) \|y\|_{W_2^1(0;1)}^2 = q_{12}\|y\|_{W_2^1(0;1)}^2, \\
Q_2[y, y] &= \int_0^1 |y(x)|^2 dx + |p_2||y(0)|^2 + |p_4||y(1)|^2 \geq \|y\|_{L_2(0;1)}^2 = q_{21}\|y\|_{L_2(0;1)}^2 \\
Q_2[y, y] &= \int_0^1 |y(x)|^2 dx + |p_2||y(0)|^2 + |p_4||y(1)|^2 \leq \|y\|_{L_2(0;1)}^2 + \\
& +|p_2|\|y\|_{C(0;1)}^2 + |p_4|\|y\|_{C(0;1)}^2 \leq \left(\frac{1}{\tilde{w}^2\tilde{l}^2} + \frac{|p_2| + |p_4|}{\tilde{w}^2}\right) \|y\|_{W_2^1(0;1)}^2 = q_{22}\|y\|_{W_2^1(0;1)}^2.
\end{aligned}$$

Пусть $y_{(j)}$ – последовательность, сходящая к y в пространстве $W_2^1(0; 1)$, тогда:

$$\|y_{(j)} - y\|_{W_2^1(0;1)} \rightarrow 0, \|y_{(j)} - y\|_{L_2(0;1)} \rightarrow 0.$$

Тогда из неравенств для квадратичных форм

$$q_{11}\|y_{(j)} - y\|_{W_2^1(0;1)} \leq Q_1[y_{(j)} - y, y_{(j)} - y] \leq q_{12}\|y_{(j)} - y\|_{W_2^1(0;1)},$$

$$q_{21}\|y_{(j)} - y\|_{L_2(0;1)} \leq Q_2[y_{(j)} - y, y_{(j)} - y] \leq q_{22}\|y_{(j)} - y\|_{W_2^1(0;1)},$$

следует:

$$Q_i[y_{(j)} - y, y_{(j)} - y] \rightarrow 0, i = 1, 2.$$

Таким образом из $y_{(j)} \rightarrow y$ следует $Q_i[y_{(j)} - y, y_{(j)} - y] \rightarrow 0, i = 1, 2$, что является критерием замкнутости квадратичных форм.

Положительные замкнутые квадратичные формы $Q_1[y, y]$, $Q_2[y, y]$ порождают самосопряженные линейные операторы $L_i : W_2^1(0; 1) \rightarrow W_2^1(0; 1)$, $i = 1, 2$, таким образом, что

$$(L_i(\vec{p})y, y) = Q_i[y, y], i = 1, 2.$$

Тогда краевая задача (4)–(5) может быть записана в виде:

$$L_1(\vec{p})y = \lambda L_2(\vec{p})y. \quad (6)$$

Действительно, в силу постановки задачи (4)–(5) для произвольного $z \in W_2^1(0; 1)$ справедливо:

$$-\int_0^1 [y''(x) + \lambda y(x)]z(x)dx - [y'(0) + (p_1 + \lambda p_2)y(0)]z(0) +$$

$$\begin{aligned}
& +[y'(1) + (p_3 + \lambda p_4)y(1)]z(1) = 0, \\
& - \int_0^1 y''(x)z(x)dx + y'(1)y(1) - y'(0)z(0) + p_1y(0)z(0) + p_3y(1)z(1) - \\
& - \lambda \left(\int_0^1 y(x)z(x)dx - p_2y(0)z(0) - p_4y(1)z(1) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Интегрируя по частям, имеем:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 y'(x)z'(x)dx + p_1y(0)z(0) + p_3y(1)z(1) - \\
& - \lambda \left(\int_0^1 y(x)z(x)dx - p_2y(0)z(0) - p_4y(1)z(1) \right) = 0, \\
& Q_1[y, z] - \lambda Q_2[y, z] = 0, \\
& (L_1(\vec{p})y - \lambda L_2(\vec{p})y, z) = 0,
\end{aligned}$$

что представляет собой операторное уравнения (6), умноженное скалярно на произвольное z . Заметим, что обратные утверждения так же справедливы в силу произвольности $z \in W_2^1(0; 1)$.

Значит, спектры краевой задачи (4)–(5) и операторного уравнения (6) совпадают.

Оператор L_1 может быть представлен в виде суммы оператора для классической задачи Штурма-Лиувилля:

$$(L_{1,0}(\vec{p})\hat{y}, \hat{y}) = \int_0^1 [y'(x)]^2 dx,$$

резольвента которого $L_{1,0}^{-1}(\vec{p})$ является компактным оператором, и ограниченного оператора

$$(L_{1,1}(\vec{p})y, y) = p_1y^2(0) + p_3y^2(1).$$

Тогда операторное уравнение (6) запишем в виде:

$$\frac{1}{\lambda}(L_{1,0}(\vec{p}) + L_{1,1}(\vec{p}))y = L_2(\vec{p})y,$$

или

$$\frac{1}{\lambda}y = (L_{1,0}(\vec{p}) + L_{1,1}(\vec{p}))^{-1}L_2(\vec{p})y.$$

Для оператора, записанного в правой части последнего уравнения, справедливо:

$$(L_{1,0}(\vec{p}) + L_{1,1}(\vec{p}))^{-1} L_2(\vec{p}) = L_{1,0}^{-1}(\vec{p}) (I + L_{1,0}^{-1}(\vec{p}) L_{1,1}(\vec{p}))^{-1} L_2(\vec{p}).$$

Поскольку произведение компактного и ограниченного операторов является компактным оператором, в силу положительной определенности операторов, получим: $L_{1,0}^{-1}(\vec{p})$ – компактный, $L_{1,1}(\vec{p})$ – ограниченный, тогда $L_{1,0}^{-1}(\vec{p}) L_{1,1}(\vec{p})$ – компактный, значит, $(I + L_{1,0}^{-1}(\vec{p}) L_{1,1}(\vec{p}))^{-1}$ – ограниченный, кроме того, $L_2(\vec{p})$ – ограниченный, тогда оператор $L_{1,0}^{-1}(\vec{p}) L_2(\vec{p})$ является компактным.

Откуда следует дискретность спектра операторного уравнения (6), значит, и краевой задачи (4)–(5). В силу самосопряженности введенных операторов L_1 , L_2 следует вещественность спектра.

Для произвольного собственного значения краевой задачи (4)–(5) справедливо:

$$\lambda = \frac{Q_1[y, y]}{Q_2[y, y]} > 0,$$

что показывает положительность спектра.

Рассмотрим метод решения прямой спектральной задачи для краевой задачи (4)–(5), в результате которого найдены 4 положительных вещественных собственных значения.

Решение уравнения (4) имеет вид:

$$y(x) = A_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + A_2 \sin(\sqrt{\lambda}x). \quad (7)$$

Подставим (7) в граничные условия (5):

$$\begin{cases} A_2 \sqrt{\lambda} - (p_1 + \lambda p_2) A_1 = 0, \\ -A_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} + A_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} + \\ + (p_3 + \lambda p_4)(A_1 \cos \sqrt{\lambda} + A_2 \sin \sqrt{\lambda}) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Систему уравнений (8) представим в векторно-матричном виде:

$$B(\lambda, \vec{p}) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (9)$$

где матрица $B(\lambda, \vec{p})$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} p_1 + \lambda p_2 & -\sqrt{\lambda} \\ -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} + (p_3 + \lambda p_4) \cos \sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} + (p_3 + \lambda p_4) \sin \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Однородная система уравнений относительно A_1, A_2 имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю.

Таким образом, решением прямой спектральной задачи для краевой задачи (4)–(5), а значит, и для оператора $B(\lambda, \vec{p})$, является решение уравнения:

$$\det(B(\lambda, \vec{p})) = 0. \quad (11)$$

или в развернутом виде:

$$\left(\frac{(p_1 + \lambda p_2)(p_3 + \lambda p_4)}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda} \right) \sin \sqrt{\lambda} + (p_1 + \lambda p_2 + p_3 + \lambda p_4) \cos \sqrt{\lambda} = 0. \quad (12)$$

В пакете MATLAB найдены 4 решения уравнения (12) при заданных значениях параметров граничных условий, а именно пусть:

$$p_1 = 1, p_2 = -2, p_3 = 3, p_4 = -4. \quad (13)$$

Для нахождения собственных значений при данных значениях параметров строится график функции

$$f(\lambda) = \left(\frac{(p_1 + \lambda p_2)(p_3 + \lambda p_4)}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda} \right) \sin \sqrt{\lambda} + (p_1 + \lambda p_2 + p_3 + \lambda p_4) \cos \sqrt{\lambda}.$$

Рассматриваются отрезки, на которых функция $f(\lambda)$ меняет знак и на каждом из них с помощью встроенной функции *fzero* находятся нули функции. Таким образом, приближенными решениями уравнения (12) являются числа:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.54144, \\ \lambda_2 &= 1.27087, \\ \lambda_3 &= 11.38717, \\ \lambda_4 &= 40.98364. \end{aligned} \quad (14)$$

Обратная спектральная задача для краевой задачи (4)-(5) состоит в нахождении всевозможных значений вектора $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ коэффициентов граничных условий, при которых наперед заданные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ являются собственными значениями краевой задачи.

Оператор $B(\lambda, \vec{p})$, определенный в (10), задан в конечномерном действительном евклидовом пространстве E^2 и может быть представит в виде:

$$B(\lambda, \vec{p}) = B_0(\lambda) + \sum_{k=1}^4 p_k B_k(\lambda), \quad (15)$$

где

$$B_0(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\lambda} \\ -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}, B_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_3(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \cos \sqrt{\lambda} & \sin \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}, B_4(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda \cos \sqrt{\lambda} & \lambda \sin \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Обратная спектральная задача краевой задачи (4)-(5), сведенная к многопараметрической обратной спектральной задаче для оператора $B(\lambda, \vec{p})$ в конечномерном евклидовом пространстве E^2 , состоит в нахождении такого вектора $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, чтобы каждое из уравнений системы:

$$B(\lambda_j, \vec{p}) \begin{pmatrix} A_1(\lambda_j) \\ A_2(\lambda_j) \end{pmatrix} = [B_0(\lambda_j) + \sum_{k=1}^4 p_k B_k(\lambda_j)] \begin{pmatrix} A_1(\lambda_j) \\ A_2(\lambda_j) \end{pmatrix} = 0, j = \overline{1, 4} \quad (16)$$

имело хотя бы одно нетривиальное решение $(A_1(\lambda_j), A_2(\lambda_j))$.

Что в свою очередь эквивалентно системе 4 алгебраических уравнений относительно неизвестных p_1, p_2, p_3, p_4 :

$$\det(B(\lambda_j, \vec{p})) = 0, j = \overline{1, 4} \quad (17)$$

или в развернутом виде:

$$\left(\frac{(p_1 + \lambda_j p_2)(p_3 + \lambda_j p_4)}{\sqrt{\lambda_j}} - \sqrt{\lambda_j} \right) \sin \sqrt{\lambda_j} + (p_1 + \lambda_j p_2 + p_3 + \lambda_j p_4) \cos \sqrt{\lambda_j} = 0, j = \overline{1, 4}.$$

В пакете MATLAB решена система уравнений (17) при помощи встроенной функции *solve* при заданных $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, значения которых определены в (14), при этом получены следующие результаты:

$$\begin{aligned}
p_1 &= 1.00000, p_2 = -2.00000, p_3 = 3.00000, p_4 = -4.00000, \\
p_1 &= 3.00000, p_2 = -4.00000, p_3 = 1.00000, p_4 = -2.00000, \\
p_1 &= 0.10220 + 0.37796i, p_2 = -0.15330 + 0.62073i, p_3 = 0.10220 - 0.37796i, \\
p_4 &= -0.15330 - 0.62073i, \\
p_1 &= 1.39780 - 0.37796i, p_2 = -2.09670 + 1.09318i, p_3 = 1.39780 + 0.37796i, \\
p_4 &= -2.09670 - 1.09318i, \\
p_1 &= 1.39780 + 0.37796i, p_2 = -2.09670 - 1.09318i, p_3 = 1.39780 - 0.37796i, \\
p_4 &= -2.09670 + 1.09318i, \\
p_1 &= 0.10220 - 0.37796i, p_2 = -0.15330 - 0.62073i, p_3 = 0.10220 + 0.37796i, \\
p_4 &= -0.15330 + 0.62073i.
\end{aligned}$$

Одно из решений системы (17) совпадает с заданными в (13) параметрами граничных условий.

Рассмотрим метод решения обратной спектральной задачи путем сведения к системе прямых спектральных задач.

Обозначим через $H_4 = E^2 \otimes E^2 \otimes E^2 \otimes E^2$ тензорное произведение 4 экземпляров евклидовых пространств E^2 . Введем в рассмотрение операторы, действующие в этом пространстве:

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= \begin{vmatrix} B_1(\lambda_1) & B_2(\lambda_1) & B_3(\lambda_1) & B_4(\lambda_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ B_1(\lambda_4) & B_2(\lambda_4) & B_3(\lambda_4) & B_4(\lambda_4) \end{vmatrix}_{\otimes}, \\
\Delta_1 &= \begin{vmatrix} B_0(\lambda_1) & B_2(\lambda_1) & B_3(\lambda_1) & B_4(\lambda_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ B_0(\lambda_4) & B_2(\lambda_4) & B_3(\lambda_4) & B_4(\lambda_4) \end{vmatrix}_{\otimes}, \\
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} B_1(\lambda_1) & B_0(\lambda_1) & B_3(\lambda_1) & B_4(\lambda_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ B_1(\lambda_4) & B_0(\lambda_4) & B_3(\lambda_4) & B_4(\lambda_4) \end{vmatrix}_{\otimes},
\end{aligned}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} B_1(\lambda_1) & B_2(\lambda_1) & B_0(\lambda_1) & B_4(\lambda_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ B_1(\lambda_4) & B_2(\lambda_4) & B_0(\lambda_4) & B_4(\lambda_4) \end{vmatrix}_{\otimes},$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} B_1(\lambda_1) & B_2(\lambda_1) & B_3(\lambda_1) & B_0(\lambda_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ B_1(\lambda_4) & B_2(\lambda_4) & B_3(\lambda_4) & B_0(\lambda_4) \end{vmatrix}_{\otimes}.$$

Будем рассматривать возмущенную систему:

$$\begin{cases} B_0(\lambda_1) + p_1(B_1(\lambda_1) + \varepsilon I) + p_2 B_2(\lambda_1) + p_3 B_3(\lambda_1) + p_4 B_4(\lambda_1) = 0, \\ B_0(\lambda_2) + p_1 B_1(\lambda_2) + p_2(B_2(\lambda_2) + \varepsilon I) + p_3 B_3(\lambda_2) + p_4 B_4(\lambda_2) = 0, \\ B_0(\lambda_3) + p_1 B_1(\lambda_3) + p_2 B_2(\lambda_3) + p_3(B_3(\lambda_3) + \varepsilon I) + p_4 B_4(\lambda_3) = 0, \\ B_0(\lambda_4) + p_1 B_1(\lambda_4) + p_2 B_2(\lambda_4) + p_3 B_3(\lambda_4) + p_4(B_4(\lambda_4) + \varepsilon I) = 0, \end{cases} \quad (18)$$

где $\varepsilon \in R$, I – единичный оператор.

Соответствующие возмущенные операторы имеют вид:

$$\Delta_0(\varepsilon) = \begin{vmatrix} B_1(\lambda_1) + \varepsilon I & B_2(\lambda_1) & B_3(\lambda_1) & B_4(\lambda_1) \\ B_1(\lambda_2) & B_2(\lambda_2) + \varepsilon I & B_3(\lambda_2) & B_4(\lambda_2) \\ B_1(\lambda_3) & B_2(\lambda_3) & B_3(\lambda_3) + \varepsilon I & B_4(\lambda_3) \\ B_1(\lambda_4) & B_2(\lambda_4) & B_3(\lambda_4) & B_4(\lambda_4) + \varepsilon I \end{vmatrix}_{\otimes},$$

$$\Delta_1(\varepsilon) = \begin{vmatrix} B_0(\lambda_1) & B_2(\lambda_1) & B_3(\lambda_1) & B_4(\lambda_1) \\ B_0(\lambda_2) & B_2(\lambda_2) + \varepsilon I & B_3(\lambda_2) & B_4(\lambda_2) \\ B_0(\lambda_3) & B_2(\lambda_3) & B_3(\lambda_3) + \varepsilon I & B_4(\lambda_3) \\ B_0(\lambda_4) & B_2(\lambda_4) & B_3(\lambda_4) & B_4(\lambda_4) + \varepsilon I \end{vmatrix}_{\otimes},$$

$$\Delta_2(\varepsilon) = \begin{vmatrix} B_1(\lambda_1) + \varepsilon I & B_0(\lambda_1) & B_3(\lambda_1) & B_4(\lambda_1) \\ B_1(\lambda_2) & B_0(\lambda_2) & B_3(\lambda_2) & B_4(\lambda_2) \\ B_1(\lambda_3) & B_0(\lambda_3) & B_3(\lambda_3) + \varepsilon I & B_4(\lambda_3) \\ B_1(\lambda_4) & B_0(\lambda_4) & B_3(\lambda_4) & B_4(\lambda_4) + \varepsilon I \end{vmatrix}_{\otimes},$$

$$\Delta_3(\varepsilon) = \begin{vmatrix} B_1(\lambda_1) + \varepsilon I & B_2(\lambda_1) & B_0(\lambda_1) & B_4(\lambda_1) \\ B_1(\lambda_2) & B_2(\lambda_2) + \varepsilon I & B_0(\lambda_2) & B_4(\lambda_2) \\ B_1(\lambda_3) & B_2(\lambda_3) & B_0(\lambda_3) & B_4(\lambda_3) \\ B_1(\lambda_4) & B_2(\lambda_4) & B_0(\lambda_4) & B_4(\lambda_4) + \varepsilon I \end{vmatrix}_{\otimes},$$

$$\Delta_4(\varepsilon) = \left| \begin{array}{cccc} B_1(\lambda_1) + \varepsilon I & B_2(\lambda_1) & B_3(\lambda_1) & B_0(\lambda_1) \\ B_1(\lambda_2) & B_2(\lambda_2) + \varepsilon I & B_3(\lambda_2) & B_0(\lambda_2) \\ B_1(\lambda_3) & B_2(\lambda_3) & B_3(\lambda_3) + \varepsilon I & B_0(\lambda_3) \\ B_1(\lambda_4) & B_2(\lambda_4) & B_3(\lambda_4) & B_0(\lambda_4) \end{array} \right|_{\otimes}.$$

Поскольку существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для $\forall \varepsilon, |\varepsilon| > \varepsilon_0$, выполняется $\det(\Delta_0(\varepsilon)) \neq 0$, то многопараметрическая обратная спектральная задача для оператора $B(\lambda, \vec{p})$ эквивалентна системе прямых спектральных задач вида:

$$(\Delta_k(\varepsilon) + (-1)^k p_k \Delta_0(\varepsilon)) \vec{Q} = 0, k = \overline{1, 4}, \quad (19)$$

которая в свою очередь равносильна системе алгебраических уравнений вида:

$$\det(\Delta_k(\varepsilon) + (-1)^k p_k \Delta_0(\varepsilon)) = 0, k = \overline{1, 4}. \quad (20)$$

Программный модуль в MATLAB, разработанный Н. Ф. Валеевым и К. В. Труновым, предназначен для исследования и построения решений многопараметрической обратной спектральной задачи для оператора в конечномерном евклидовом пространстве.

Программа обеспечивает ввод данных из файла, в котором в данном случае хранится матрица вида:

$$\begin{pmatrix} -B_0(\lambda_1) & B_1(\lambda_1) & B_2(\lambda_1) & B_3(\lambda_1) & B_4(\lambda_1) \\ -B_0(\lambda_2) & B_1(\lambda_2) & B_2(\lambda_2) & B_3(\lambda_2) & B_4(\lambda_2) \\ -B_0(\lambda_3) & B_1(\lambda_3) & B_2(\lambda_3) & B_3(\lambda_3) & B_4(\lambda_3) \\ -B_0(\lambda_4) & B_1(\lambda_4) & B_2(\lambda_4) & B_3(\lambda_4) & B_4(\lambda_4) \end{pmatrix}.$$

Размерность $n = 2$ матриц $B_i(\lambda)$, их количество $m = 4$ и точность определяемых параметров $\varepsilon = 0.001$ вводится в соответствующем диалоговом окне. В результате работы программы определяются $n^m = 2^4 = 16$ векторов $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, которые предлагается сохранить в выбранном файле, который имеет вид:

$$\begin{aligned} p_1 &= -877.85366, p_2 = -32.42814, p_3 = -72.46450, p_4 = -287.18371, \\ p_1 &= -724.26031 + 46.83288i, p_2 = 147.38877 + 63.38684i, \\ p_3 &= 34.12714 - 23.84841i, p_4 = 127.13451 - 92.21240i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_1 &= -724.26031 - 46.83288i, p_2 = 147.38877 - 63.38684i, \\
p_3 &= 34.12714 + 23.84841i, p_4 = 127.13451 + 92.21240i, \\
p_1 &= -699.09173, p_2 = 552.65381, p_3 = -244.52037, p_4 = -953.33285, \\
p_1 &= -97.87816, p_2 = 81.65980, p_3 = 38.30930, p_4 = 143.52243, \\
p_1 &= 3.00050, p_2 = -3.97253, p_3 = 0.99799, p_4 = -1.98709, \\
p_1 &= 1.39654 + 0.38972i, p_2 = -2.09835 - 1.11094i, p_3 = 1.39144 - 0.37274i, \\
p_4 &= -2.07516 + 1.09457i, \\
p_1 &= 0.10458 + 0.37690i, p_2 = -0.15482 + 0.62155i, p_3 = 0.10263 - 0.37332i, \\
p_4 &= -0.15211 - 0.61318i, \\
p_1 &= 0.10458 - 0.37690i, p_2 = -0.15482 - 0.62155i, p_3 = 0.10263 + 0.37332i, \\
p_4 &= -0.15211 + 0.61318i, \\
p_1 &= 0.99521, p_2 = -2.00124, p_3 = 3.00998, p_4 = -3.97654, \\
p_1 &= -0.10605, p_2 = -1.29874, p_3 = 634.03926, p_4 = -500.31031, \\
p_1 &= 1.17229, p_2 = -1.33395, p_3 = -102.63204, p_4 = 189.81961, \\
p_1 &= -1.01631, p_2 = 0.37803, p_3 = 950697.80162, p_4 = -68159.47512, \\
p_1 &= -1.01634, p_2 = 0.37804, p_3 = -17515.96357, p_4 = -68164.43759, \\
p_1 &= -1.01637, p_2 = 0.37800, p_3 = -17618.90383, p_4 = 1779.25814.
\end{aligned}$$

Одно из решений, полученных в результате работы программы, совпадает с заданными в (13) параметрами граничных условий с заданной точностью $\varepsilon = 0.001$.

Рассмотрим алгоритм численного построения решений многопараметрической обратной спектральной задачи для оператора $B(\lambda, \vec{p})$ в конечномерном евклидовом пространстве E^4 , основанный на монотонной зависимости собственных значений от параметров граничных условий и является аналогом метода деления отрезка пополам.

Введем в рассмотрение параллелепипед:

$$[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi} = \{\vec{x} \in R^4 : a_k \leq x_k \leq b_k\}.$$

Обозначим через $\mu_1(\vec{p}), \mu_2(\vec{p}), \dots, \mu_4(\vec{p})$ собственные значения оператора $B(\lambda, \vec{p})$ при некотором значении вектора $\vec{p} \in [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}$. Функция $\vec{\mu}(\vec{p}) = (\mu_1(\vec{p}), \mu_2(\vec{p}), \dots, \mu_4(\vec{p})) : \Pi \rightarrow \Pi$ обладает свойствами непрерывной дифференцируемости $\vec{\mu}(\vec{p}) \in C^1(\Pi)$ и монотонности

$$\frac{\partial \mu_j(\vec{p})}{\partial p_k} > 0, k = \overline{1, 4}, j = \overline{1, 4}.$$

Областью несуществования решений многопараметрической обратной спектральной задачи для заданных спектральных данных $\vec{\lambda} \in R^4$ будем называть область, в которой нет вектора $\vec{p} \in R^4$ такого, что $\vec{\mu}(\vec{p}) = \vec{\lambda}$.

В силу монотонности функции $\vec{\mu}(\vec{p})$ параллелепипед $[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}$ является областью несуществования решений многопараметрической обратной спектральной задачи для заданных спектральных данных, если $\vec{\lambda} \notin [\vec{\mu}(\vec{a}), \vec{\mu}(\vec{b})]_{\Pi}$.

Определим параллелепипед, в котором будем искать решения многопараметрической обратной спектральной задачи при спектральных данных (16), следующим образом:

$$[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi} = \{\vec{x} \in R^4 : 1 \leq x_1 \leq 10, -10 \leq x_2 \leq 1, 1 \leq x_3 \leq 10, -10 \leq x_4 \leq 1\}.$$

Возьмем точку $\vec{c} \in [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}$, которая будет являться центром параллелепипеда. Поскольку у четырехмерного параллелепипеда $2^4 = 16$ вершины, то можно сформировать 16 подобластей $[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}^{(i)}, i = \overline{1, 16}$ таких, что:

$$\bigcap_{i=1}^{16} [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}^{(i)} = \vec{c}, \bigcup_{i=1}^{16} [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}^{(i)} = [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}.$$

Далее в каждом параллелепипеде $[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}^{(i)}, i = \overline{1, 16}$ проверим выполнения условия $\vec{\lambda} \notin [\vec{\mu}(\vec{a}), \vec{\mu}(\vec{b})]_{\Pi}^{(i)}$. Если условие выполняется, то рассматриваемый параллелепипед не содержит решений, если же условие не выполняется, то по вышеописанной схеме выполняем его разбиение и переходим к следующему параллелепипеду.

В пакете MATLAB разработан комплекс программ, реализующих представленный алгоритм численного построения решений многопараметрической обратной спектральной задачи для оператора $B(\lambda, \vec{p})$ в конечномерном евклидовом пространстве E^4 .

В результате его выполнения с точностью до 7 знака для заданного параллелепипеда получены два решения:

$$p_1 = 1.0000000, p_2 = -2.0000000, p_3 = 3.0000000, p_4 = -4.0000000,$$

$$p_1 = 3.0000000, p_2 = -4.0000000, p_3 = 1.0000000, p_4 = -2.0000000.$$

Одно из них совпадает с заданными в (13) параметрами граничных условий.

Таким образом, представлены три метода решения обратной спектральной задачи для краевой задачи (4)–(6), сведенной к многопараметрической обратной спектральной задаче для оператора в конечномерном евклидовом пространстве: явный метод решения системы алгебраических уравнений, сведение к системе прямых спектральных задач, алгоритм численного решения, основанный на монотонной зависимости собственных значений от параметров граничных условий.

3.1 Численный эксперимент для соединения проводников типа «звезда»

Рассмотрим электрическую цепь в виде соединения типа «звезда». На каждом из трех фрагментов сети задается уравнение электрических колебаний в проводнике длиной l_k с распределенными емкостью C_k и индуктивностью L_k :

$$L_k C_k (U_k)_{tt} = (U_k)_{x_k x_k} (x_k; t), x_k \in (0; l_k), k = \overline{1, 3}. \quad (21)$$

Граничные условия описывают ситуацию, когда k -ый проводник заземлен через сосредоточенную самоиндукцию $\tilde{L}_k$ и емкость $\tilde{C}_k$, соединенные последовательно:

$$(U_k)_{x_k} (l_k; t) + C_k \tilde{L}_k (U_k)_{tt} (l_k; t) + \frac{C_k}{\tilde{C}_k} (U_k) (l_k; t) = 0, k = \overline{1, 3}. \quad (22)$$

В общем узле задаются условие непрерывности потенциала и условие баланса токов, известные как законы Кирхгофа:

$$\begin{cases} U_1(0; t) = U_2(0; t) = U_3(0; t), \\ \sum_{i=1}^3 (U_i)_{x_i} (0; t) = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Будем искать собственные колебания динамической системы в виде:

$$U_k(x_k; t) = e^{i\omega t} y_k(x_k), k = \overline{1, 3}.$$

Введем обозначения:

$$\begin{cases} \lambda = \omega^2 > 0, a_k = \frac{1}{\sqrt{L_k C_k}} > 0, \\ p_{k1} = \frac{C_k}{\tilde{C}_k} > 0, p_{k2} = -C_k \tilde{L}_k, k = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

Получим краевую задачу:

$$a_k^2 y_k''(x_k) + \lambda y_k(x_k), x_k \in (0; l_k), k = \overline{1, 3}, \quad (24)$$

с граничными условиями

$$y_k'(l_k) + (p_{k1} + \lambda p_{k2}) y_k(l_k) = 0, k = \overline{1, 3}, \quad (25)$$

и условиями в общем узле

$$\begin{cases} y_1(0) = y_2(0) = y_3(0), \\ \sum_{i=1}^3 y_i'(0) = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Суть прямой спектральной задачи для краевой задачи (24)–(26) состоит в нахождении таких значений параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения краевой задачи. Покажем, что собственные значения краевой задачи (24)–(26) являются вещественными и положительными.

Аналогично предыдущим рассуждениям введем билинейные формы в гильбертовом пространстве $H_1 = W_2^1(0; l_1) \times W_2^1(0; l_2) \times W_2^1(0; l_3)$ элементов вида $\hat{y} = (y_1(x_1), y_2(x_2), y_3(x_3))$, для которых выполняются условия (26), следующим образом:

$$Q_1[\hat{y}, \hat{z}] = \sum_{k=1}^3 \left(\int_0^{l_k} y_k'(x_k) \bar{z}_k'(x_k) dx_k + p_{k1} y_k(l_k) \bar{z}_k(l_k) \right),$$

$$Q_2[\hat{y}, \hat{z}] = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{a_k^2} \int_0^{l_k} y_k(x_k) \bar{z}_k(x_k) dx_k - p_{k2} y_k(l_k) \bar{z}_k(l_k) \right),$$

где $\hat{y}, \hat{z} \in H_1$.

Введенные симметрические билинейные формы порождают квадратичные, причем положительно определенные:

$$Q_1[\hat{y}, \hat{y}] = \sum_{k=1}^3 \left(\int_0^{l_k} (y'_k(x_k))^2 dx_k + p_{k1} |y_k(l_k)|^2 \right) > 0.$$

$$Q_2[\hat{y}, \hat{y}] = \sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{a_k^2} \int_0^{l_k} y_k^2(x_k) dx_k - p_{k2} |y_k(l_k)|^2 \right) > 0.$$

По теореме вложения Соболева $W_2^1(0; l_k) \subset C(0; l_k) \subset L_2(0; l_k)$, тогда для соответствующих норм справедливо:

$$\tilde{l}_k \|y_k\|_{L_2(0; l_k)} \leq \|y_k\|_{C(0; l_k)} \leq \frac{1}{\tilde{w}_k} \|y_k\|_{W_2^1(0; l_k)},$$

В силу неравенств для норм получим:

$$\begin{aligned} Q_1[\hat{y}, \hat{y}] &= \sum_{k=1}^3 \left(\int_0^{l_k} |y'_k(x_k)|^2 dx_k + p_{k1} |y_k(l_k)|^2 \right) \geq \sum_{k=1}^3 \int_0^{l_k} |y'_k(x_k)|^2 dx_k = \\ &= \sum_{k=1}^3 \|y_k\|_{W_2^1(0; l_k)}^2 = q_{11} \|\hat{y}\|_{H_1}^2, \\ Q_1[\hat{y}, \hat{y}] &= \sum_{k=1}^3 \left(\int_0^{l_k} |y'_k(x_k)|^2 dx_k + p_{k1} |y_k(l_k)|^2 \right) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^3 \left(\|y_k\|_{W_2^1(0; l_k)}^2 + p_{k1} \|y_k\|_{C(0; l_k)}^2 \right) \leq \sum_{k=1}^3 \left(1 + \frac{p_{k1}}{\tilde{w}_k^2} \right) \|y_k\|_{W_2^1(0; l_k)}^2 = q_{12} \|\hat{y}\|_{H_1}^2, \\ Q_2[\hat{y}, \hat{y}] &= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{a_k^2} \int_0^{l_k} |y_k(x_k)|^2 dx_k - p_{k2} |y_k(l_k)|^2 \right) \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^3 \frac{1}{a_k^2} \int_0^{l_k} |y_k(x_k)|^2 dx_k = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{a_k^2} \|y_k\|_{L_2(0; l_k)}^2 = q_{21} \|\hat{y}\|_{H_2}^2, \\ Q_2[\hat{y}, \hat{y}] &= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{a_k^2} \int_0^{l_k} |y_k(x_k)|^2 dx_k - p_{k2} |y_k(l_k)|^2 \right) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{a_k^2} \|y_k\|_{L_2(0; l_k)}^2 + |p_{k2}| \|y_k\|_{C(0; l_k)}^2 \right) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{a_k^2 \tilde{l}_k^2 \tilde{w}_k^2} + \frac{|p_{k2}|}{\tilde{l}_k^2 \tilde{w}_k^2} \right) \|y_k\|_{W_2^1(0;l_k)}^2 = q_{22} \|\hat{y}\|_{H_2}^2.$$

Пусть $\hat{y}_{(j)}$ – последовательность, сходящая к $\hat{y}$ в пространстве H_1 , тогда:

$$\|\hat{y}_{(j)} - \hat{y}\|_{H_i} \rightarrow 0, i = 1, 2.$$

Тогда из неравенств для квадратичных форм

$$q_{11} \|\hat{y}_{(j)} - \hat{y}\|_{H_1} \leq Q_1[\hat{y}_{(j)} - \hat{y}, \hat{y}_{(j)} - \hat{y}] \leq q_{12} \|\hat{y}_{(j)} - \hat{y}\|_{H_1},$$

$$q_{21} \|\hat{y}_{(j)} - \hat{y}\|_{H_2} \leq Q_2[\hat{y}_{(j)} - \hat{y}, \hat{y}_{(j)} - \hat{y}] \leq q_{22} \|\hat{y}_{(j)} - \hat{y}\|_{H_1},$$

следует:

$$Q_i[\hat{y}_{(j)} - \hat{y}, \hat{y}_{(j)} - \hat{y}] \rightarrow 0, i = 1, 2.$$

Таким образом из $\hat{y}_{(j)} \rightarrow \hat{y}$ следует $Q_i[\hat{y}_{(j)} - \hat{y}, \hat{y}_{(j)} - \hat{y}] \rightarrow 0, i = 1, 2$, что является критерием замкнутости квадратичных форм.

Положительные замкнутые квадратичные формы порождают линейные самосопряженные операторы $L_i : H_1 \rightarrow H_1, i = 1, 2$, таким образом, что:

$$(L_i(\vec{p})\hat{y}, \hat{y}) = Q_i[\hat{y}, \hat{y}], i = 1, 2.$$

Докажем, что краевая задача (24)–(26) может быть записана в виде операторного уравнения:

$$L_1 \hat{y} = \lambda L_2 \hat{y}. \quad (27)$$

Действительно, в силу постановки краевой задачи (24)–(26) для произвольного $\hat{z} \in H_1$ получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 \left(- \int_0^{l_k} \left[y_k''(x_k) + \frac{\lambda}{a_k^2} z_k(x_k) \right] y_k(x_k) dx_k \right) + \\ & + \sum_{k=1}^3 [y_k'(l_k) + (p_{k1} + \lambda p_{k2}) y_k(l_k)] z_k(l_k) = 0, \end{aligned}$$

тогда:

$$\sum_{k=1}^3 \left(- \int_0^{l_k} y_k''(x_k) z_k(x_k) dx_k + (y_k'(l_k) + p_{k1} y_k(l_k)) z_k(l_k) \right) -$$

$$-\lambda \sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{a_k^2} \int_0^{l_k} y_k(x_k) z_k(x_k) dx_k - p_{k2} y_k(l_k) z_k(l_k) \right) = 0.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 \left(\int_0^{l_k} y'_k(x_k) z'_k(x_k) dx_k + y'_k(0) z_k(0) + p_{k1} y_k(l_k) z_k(l_k) \right) - \\ & -\lambda \sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{a_k^2} \int_0^{l_k} y_k(x_k) z_k(x_k) dx_k - p_{k2} y_k(l_k) z_k(l_k) \right) = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

В силу первого из условий в общем узле (26) для произвольного $\hat{z} \in H_1$ имеем:

$$z_1(0) = z_2(0) = z_3(0) = z_0,$$

тогда в силу второго из условий в общем узле (26) для произвольного $\hat{y} \in H_1$:

$$\sum_{k=1}^3 y'_k(0) z_k(0) = \sum_{k=1}^3 y'_k(0) z_0 = z_0 \sum_{k=1}^3 y'_k(0) = 0.$$

С учетом последнего равенства (28) примет вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 \left(\int_0^{l_k} y'_k(x_k) z'_k(x_k) dx_k + p_{k1} y_k(l_k) z_k(l_k) \right) - \\ & -\lambda \sum_{k=1}^3 \left(\frac{1}{a_k^2} \int_0^{l_k} y_k(x_k) z_k(x_k) dx_k - p_{k2} y_k(l_k) z_k(l_k) \right) = 0. \end{aligned}$$

$$Q_1[\hat{y}, \hat{z}] - \lambda Q_2[\hat{y}, \hat{z}] = 0$$

$$(L_1(\vec{p})\hat{y} - \lambda L_2(\vec{p})\hat{y}, \hat{z}) = 0.$$

Обратные утверждения так же верны в силу произвольности $\hat{z} \in H_1$.

Значит, спектр краевой задачи (24)–(26) и операторного уравнения (27) совпадает.

Введенный оператор L_1 может быть представлен в виде суммы оператора для классической задачи Штурма-Лиувилля

$$(L_{1,0}(\vec{p})\hat{y}, \hat{y}) = \sum_{k=1}^3 \int_0^{l_k} (y'_k(x_k))^2 dx_k,$$

резольвента которого $L_{1,0}^{-1}(\vec{p})$ является компактным оператором, и ограниченного оператора

$$(L_{1,1}(\vec{p})\hat{y}, \hat{y}) = \sum_{k=1}^3 p_{k1} |y_k(l_k)|^2.$$

Тогда операторное уравнение (27) запишем в виде:

$$\frac{1}{\lambda} \hat{y} = (L_{1,0}(\vec{p}) + L_{1,1}(\vec{p}))^{-1} L_2(\vec{p}) \hat{y}.$$

Для оператора, записанного в правой части, справедливо:

$$(L_{1,0}(\vec{p}) + L_{1,1}(\vec{p}))^{-1} L_2(\vec{p}) = L_{1,0}^{-1}(\vec{p}) (I + L_{1,0}^{-1}(\vec{p}) L_{1,1}(\vec{p}))^{-1} L_2(\vec{p}).$$

Поскольку произведение компактного и ограниченного операторов является компактным оператором, в силу положительной определенности операторов, получим: $L_{1,0}^{-1}(\vec{p})$ – компактный, $L_{1,1}(\vec{p})$ – ограниченный, тогда $L_{1,0}^{-1}(\vec{p}) L_{1,1}(\vec{p})$ – компактный, значит, $(I + L_{1,0}^{-1}(\vec{p}) L_{1,1}(\vec{p}))^{-1}$ – ограниченный, кроме того, $L_2(\vec{p})$ – ограниченный, тогда оператор $L_{1,0}^{-1}(\vec{p}) L_2(\vec{p})$ является компактным. Откуда следует дискретность спектра операторного уравнения (27), значит, и краевой задачи (24)–(26).

В силу положительности и самосопряженности введенных операторов L_1 , L_2 произвольное собственное значение краевой задачи (24)–(26)

$$\lambda = \frac{(L_1(\vec{p})\hat{y}, \hat{y})}{(L_2(\vec{p})\hat{y}, \hat{y})} = \frac{Q_1[\hat{y}, \hat{y}]}{Q_2[\hat{y}, \hat{y}]}$$

является вещественным и положительным.

Рассмотрим решение прямой спектральной задачи для краевой задачи (24)–(26), основанное на сведении к прямой спектральной задаче для оператора в конечномерном пространстве, в результате которого найдены 6 положительных вещественных собственных значения.

Решение уравнения (24) имеет вид:

$$y_k(x_k) = A_{k1} \sin \frac{\sqrt{\lambda} x_k}{a_k} + A_{k2} \cos \frac{\sqrt{\lambda} x_k}{a_k}, k = \overline{1, 3}. \quad (29)$$

Подставив (29) в граничные условия (25) и условия в общем узле (26), получим систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{\lambda}}{a_k} (A_{k1} \cos \frac{\sqrt{\lambda} l_k}{a_k} - A_{k2} \sin \frac{\sqrt{\lambda} l_k}{a_k}) + (p_{k1} + \lambda p_{k2}) (A_{k1} \sin \frac{\sqrt{\lambda} l_k}{a_k} + \\ + A_{k2} \cos \frac{\sqrt{\lambda} l_k}{a_k}) = 0, k = \overline{1, 3}, \\ A_{1,2} = A_{2,2} = A_{3,2}, \\ \sum_{k=1}^3 \frac{\sqrt{\lambda}}{a_k} A_{k,1} = 0. \end{array} \right. \quad (30)$$

Введем обозначения:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{k1} = \frac{\sqrt{\lambda}}{a_k} \cos \frac{\sqrt{\lambda} l_k}{a_k} + (p_{k1} + \lambda p_{k2}) \sin \frac{\sqrt{\lambda} l_k}{a_k}, \\ b_{k2} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{a_k} \sin \frac{\sqrt{\lambda} l_k}{a_k} + (p_{k1} + \lambda p_{k2}) \cos \frac{\sqrt{\lambda} l_k}{a_k}, k = \overline{1, 3}. \end{array} \right. \quad (31)$$

Тогда система (30) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{k,1} b_{k1} + A_{k,2} b_{k2} = 0, k = \overline{1, 3}, \\ A_{1,2} - A_{2,2} = 0, \\ A_{1,2} - A_{3,2} = 0, \\ \sum_{k=1}^3 \frac{\sqrt{\lambda}}{a_k} A_{k,1} = 0, \end{array} \right. \quad (32)$$

или в векторно-матричном виде:

$$B(\lambda, \vec{p}) \vec{A} = 0, \quad (33)$$

где

$$B(\lambda, \vec{p}) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{31} & b_{32} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{\lambda}}{a_1} & 0 & \frac{\sqrt{\lambda}}{a_2} & 0 & \frac{\sqrt{\lambda}}{a_3} & 0 \end{pmatrix}, \vec{A} = (A_{1,1}; A_{1,2}; A_{2,1}; A_{2,2}; A_{3,1}; A_{3,2}).$$

Однородная система уравнений (33) относительно $\vec{A}$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю. Тогда решением прямой спектральной задачи для оператора $B(\lambda, \vec{p})$ в конечномерном евклидовом пространстве, а значит, и для краевой задачи (24)–(26) является решение уравнения:

$$\det(B(\lambda, \vec{p})) = 0 \quad (34)$$

или в развернутом виде:

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\frac{\sqrt{\lambda}}{a_k} \sin \frac{\sqrt{\lambda} l_k}{a_k} - (p_{k1} + \lambda p_{k2}) \cos \frac{\sqrt{\lambda} x_k}{a_k}}{a_k \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a_k} \cos \frac{\sqrt{\lambda} x_k}{a_k} + (p_{k1} + \lambda p_{k2}) \sin \frac{\sqrt{\lambda} l_k}{a_k} \right)} = 0. \quad (35)$$

В пакете MATLAB с помощью встроенной функции найдены решения уравнения (35) при заданных значениях параметров, а именно, пусть:

$$\begin{aligned} a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, l_1 = 1, l_2 = 2, l_3 = 3, \\ p_{11} = 1, p_{12} = -2, p_{21} = 3, p_{22} = -4, p_{31} = 5, p_{32} = -6. \end{aligned} \quad (36)$$

При данных значениях параметров строится график функции

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^3 \frac{\frac{\sqrt{\lambda}}{a_k} \sin \frac{\sqrt{\lambda} l_k}{a_k} - (p_{k1} + \lambda p_{k2}) \cos \frac{\sqrt{\lambda} x_k}{a_k}}{a_k \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a_k} \cos \frac{\sqrt{\lambda} x_k}{a_k} + (p_{k1} + \lambda p_{k2}) \sin \frac{\sqrt{\lambda} l_k}{a_k} \right)}.$$

Нули функции $f(\lambda)$ будем искать с помощью встроенной в MATLAB функции *fzero* на тех отрезках, на которых функция меняет знак. Таким образом, приближенными решениями уравнения (35) являются числа:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.30173, \\ \lambda_2 &= 0.69019, \\ \lambda_3 &= 0.75950, \\ \lambda_4 &= 1.16532, \\ \lambda_5 &= 1.99507, \\ \lambda_6 &= 3.74285. \end{aligned} \quad (37)$$

Обратная спектральная задача для краевой задачи (24)-(26) состоит в нахождении всевозможных значений вектора $\vec{p} = (p_{11}, p_{21}, p_{31}, p_{12}, p_{22}, p_{32})$ коэффициентов граничных условий, при которых наперед заданные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_6$ являются собственными значениями краевой задачи.

Введенный оператор $B(\lambda, \vec{p})$ задан в конечномерном действительном евклидовом пространстве E^6 можно представить в виде:

$$B(\lambda, \vec{p}) = B_0(\lambda) + \sum_{k=1}^3 (p_{k1} B_{k1}(\lambda) + p_{k2} B_{k2}(\lambda)), \quad (38)$$

где

$$B_0(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\lambda}}{a_1} \cos \frac{\sqrt{\lambda} l_1}{a_1} & -\frac{\sqrt{\lambda}}{a_1} \sin \frac{\sqrt{\lambda} l_1}{a_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{\lambda}}{a_2} \cos \frac{\sqrt{\lambda} l_2}{a_2} & -\frac{\sqrt{\lambda}}{a_2} \sin \frac{\sqrt{\lambda} l_2}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{\lambda}}{a_3} \cos \frac{\sqrt{\lambda} l_3}{a_3} & -\frac{\sqrt{\lambda}}{a_3} \sin \frac{\sqrt{\lambda} l_3}{a_3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{\lambda}}{a_1} & 0 & \frac{\sqrt{\lambda}}{a_2} & 0 & \frac{\sqrt{\lambda}}{a_3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{11}(\lambda) = \begin{pmatrix} \sin \frac{\sqrt{\lambda} l_1}{a_1} & \cos \frac{\sqrt{\lambda} l_1}{a_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{12}(\lambda) = \lambda B_{11}(\lambda),$$

$$B_{21}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \frac{\sqrt{\lambda} l_2}{a_2} & \cos \frac{\sqrt{\lambda} l_2}{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{22}(\lambda) = \lambda B_{21}(\lambda),$$

$$B_{31}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \frac{\sqrt{\lambda} l_3}{a_3} & \cos \frac{\sqrt{\lambda} l_3}{a_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{32}(\lambda) = \lambda B_{31}(\lambda).$$

Таким образом, обратная спектральная задача краевой задачи (24)–(26) сведена к многопараметрической обратной спектральной задаче для опера-

тора $B(\lambda, \vec{p})$ в конечномерном евклидовом пространстве E^6 . Она состоит в нахождении такого вектора $\vec{p} = (p_{11}, p_{21}, p_{31}, p_{12}, p_{22}, p_{32})$, чтобы каждое из уравнений системы

$$B(\lambda_j, \vec{p})\vec{A} = [B_0(\lambda_j) + \sum_{k=1}^3 (p_{k1}B_{k1}(\lambda_j) + p_{k2}B_{k2}(\lambda_j))]A(\vec{\lambda}_j) = 0, j = \overline{1, 6} \quad (39)$$

имело хотя бы одно нетривиальное решение $A(\vec{\lambda}_j)$.

Что в свою очередь эквивалентно системе 6 алгебраических уравнений относительно неизвестных $p_{11}, p_{21}, p_{31}, p_{12}, p_{22}, p_{32}$:

$$\det(B(\lambda_j, \vec{p})) = 0, j = \overline{1, 6} \quad (40)$$

или в развернутом виде:

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\frac{\sqrt{\lambda_j}}{a_k} \sin \frac{\sqrt{\lambda_j} l_k}{a_k} - (p_{k1} + \lambda_j p_{k2}) \cos \frac{\sqrt{\lambda_j} l_k}{a_k}}{a_k \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a_k} \cos \frac{\sqrt{\lambda_j} l_k}{a_k} + (p_{k1} + \lambda_j p_{k2}) \sin \frac{\sqrt{\lambda_j} l_k}{a_k} \right)} = 0, j = \overline{1, 6}. \quad (41)$$

В пакете MATLAB при помощи встроенной функции *solve* невозможно решить систему 6 алгебраических уравнений относительно 6 неизвестных, поэтому зафиксируем 2 из 6 значений вектора параметров граничных условий, например, $p_{21} = 3, p_{22} = -4$. При заданных $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_5, \lambda_6$, значения которых определены в (37), решим систему 4 уравнений относительно 4 неизвестных, при этом получены следующие результаты:

$$\begin{aligned} p_{11} &= 0.46619, p_{12} = -0.73505, p_{31} = -31.27298, p_{32} = 46.47073 \\ p_{11} &= -8.49053, p_{12} = 10.53454, p_{31} = 0.43762, p_{32} = -0.47330 \\ p_{11} &= 1.00000, p_{12} = -2.00000, p_{31} = 5.00000, p_{32} = -6.00000 \\ p_{11} &= -2.00151, p_{12} = 1.74754, p_{31} = -0.63618, p_{32} = 2.59949 \\ p_{11} &= -2.04971, p_{12} = 1.76194, p_{31} = -0.69775, p_{32} = 2.82091 \\ p_{11} &= 1.35390, p_{12} = -3.36723, p_{31} = 7.77117, p_{32} = -7.59855 \end{aligned}$$

Одно из решений системы (17) совпадает с заданными в (36) параметрами граничных условий.

Рассмотрим алгоритм численного построения решений многопараметрической обратной спектральной задачи для оператора $B(\lambda, \vec{p})$ в конечномер-

ном евклидовом пространстве E^6 , основанный на монотонной зависимости собственных значений от параметров граничных условий и является аналогом метода деления отрезка пополам.

Введем в рассмотрение параллелепипед:

$$[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi} = \{\vec{x} \in R^6 : a_k \leq x_k \leq b_k\}.$$

Обозначим через $\mu_1(\vec{p}), \mu_2(\vec{p}), \dots, \mu_6(\vec{p})$ собственные значения оператора $B(\lambda, \vec{p})$ при некотором значении вектора $\vec{p} \in [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}$.

Функция $\vec{\mu}(\vec{p}) = (\mu_1(\vec{p}), \mu_2(\vec{p}), \dots, \mu_6(\vec{p})) : \Pi \rightarrow \Pi$ обладает свойствами непрерывной дифференцируемости $\vec{\mu}(\vec{p}) \in C^1(\Pi)$ и монотонности

$$\frac{\partial \mu_j(\vec{p})}{\partial p_{k1}} > 0, \frac{\partial \mu_j(\vec{p})}{\partial p_{k2}} > 0, k = \overline{1, 3}, j = \overline{1, 6}.$$

Областью несуществования решений многопараметрической обратной спектральной задачи для заданных спектральных данных $\vec{\lambda} \in R^6$ будем называть область, в которой нет вектора $\vec{p} \in R^6$ такого, что $\vec{\mu}(\vec{p}) = \vec{\lambda}$.

В силу монотонности функции $\vec{\mu}(\vec{p})$ параллелепипед $[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}$ является областью несуществования решений многопараметрической обратной спектральной задачи для заданных спектральных данных, если $\vec{\lambda} \notin [\vec{\mu}(\vec{a}), \vec{\mu}(\vec{b})]_{\Pi}$.

Определим параллелепипед, в котором будем искать решения многопараметрической обратной спектральной задачи при спектральных данных (16), следующим образом:

$$[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi} = \{\vec{x} \in R^6 : 1 \leq x_{2k-1} \leq 10, -10 \leq x_{2k} \leq 1, k = \overline{1, 3}\}.$$

Возьмем точку $\vec{c} \in [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}$, которая будет являться центром параллелепипеда. Поскольку у шестимерного параллелепипеда $2^6 = 64$ вершины, то можно сформировать 64 подобласти $[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}^{(i)}$, $i = \overline{1, 64}$ таких, что:

$$\bigcap_{i=1}^{64} [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}^{(i)} = \vec{c}, \bigcup_{i=1}^{64} [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}^{(i)} = [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}.$$

Далее в каждом параллелепипеде $[\vec{a}, \vec{b}]_K^{(i)}$, $i = \overline{1, 64}$ проверим выполнение условия $\vec{\lambda} \notin [\vec{\mu}(\vec{a}), \vec{\mu}(\vec{b})]_K^{(i)}$. Если условие выполняется, то рассматриваемый

параллелепипед не содержит решений, если же условие не выполняется, то по вышеописанной схеме выполняем его разбиение и переходим к следующему параллелепипеду.

В пакете MATLAB разработан комплекс программ, реализующих представленный алгоритм численного построения решений многопараметрической обратной спектральной задачи для оператора $B(\lambda, \vec{p})$ в конечномерном евклидовом пространстве E^6 . В результате его выполнения с точностью до 7 знака для заданного параллелепипеда получены решения:

$$\begin{aligned} p_{11} &= 1.0000000, p_{12} = -2.0000000, p_{21} = 3.0000000, p_{22} = -4.0000000, \\ p_{31} &= 5.0000000, p_{32} = -6.0000000; \\ p_{11} &= 1.0874127, p_{12} = -2.1623680, p_{21} = 2.4188092, p_{22} = -3.5119061, \\ p_{31} &= 6.3403197, p_{32} = -7.0099062; \\ p_{11} &= 127.0697394, p_{12} = -175.3805220, p_{21} = 4.8907050, p_{22} = -4.0017502, \\ p_{31} &= 1.3165713, p_{32} = -3.2410163; \end{aligned}$$

Одно из них совпадает с заданными в (36) параметрами граничных условий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты работы:

1. Предложен математический метод моделирования колебательных процессов в электрической сети на геометрическом графе типа «дерево» в виде пучка линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Данный метод отличается от известных тем, что позволяет определить m неизвестных параметров граничных условий с помощью ровно m собственных значений.

2. Разработан и обоснован новый численный алгоритм вычисления параметров граничных условий по конечному набору заданных собственных значений, апробированный на аналитических решениях модельных задач.

3. Разработан комплекс программ, позволяющий провести расчет параметров граничных условий по конечному набору заданных собственных значений для единичного проводника и для соединения типа «звезда», которые могут расширены на любой граф типа «дерево». Проведена проверка адекватности результатов вычислительного эксперимента с помощью сравнения результатов с аналитическими решениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абзалимов, Р. Р. Методика отыскания собственных значений и собственных функций регулярной задачи Штурма–Лиувилля / Р. Р. Абзалимов // Вестник Башкирского университета. – 1999. – № 2. – С. 20–23.
2. Амбарцумян, В. А. *Über eine Frage der Eigenwerttheorie* / В. А. Амбарцумян // *Zeit.Phys.* – 1929. – Т. 53. – С. 690–695.
3. Аткинсон, Ф. М. Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф. М. Аткинсон – Москва: Мир, 1966. – 750 с.
4. Ахиезер, Н. И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. – Москва: Наука, 1966. – 544 с.
5. Ахтямов, А. М. О восстановлении краевых условий задачи Штурма–Лиувилля по ее спектру / А. М. Ахтямов // Вестник Башкирского университета. – 1999. – № 1. – С. 13–17.
6. Ахтямов, А. М. О единственности восстановления краевых условий спектральной задачи по ее спектру / А. М. Ахтямов // *Фундаментальная и прикладная математика.* – 2000. – Т. 6. – № 4. – С. 995–1006.
7. Ахтямов, А. М. О коэффициентах разложений по собственным функциям краевой задачи со спектральным параметром в граничных условиях / А. М. Ахтямов // *Известия высших учебных заведений. Математика.* – 2000. – № 2. – С. 13–18.
8. Ахтямов, А. М. Об определении краевого условия по конечному набору собственных значений / А. М. Ахтямов // *Дифференциальные уравнения.* – 1999. – Т. 35. – № 8. – С. 1127–1128.
9. Ахтямов, А. М. Теория идентификации краевых условий / А. М. Ахтямов. – Уфа: Гилем, 2008. – 300 с.
10. Ахтямов, А. М. Акустическая диагностика сосредоточенных масс на концах струнного графа с упругим закреплением на концах / А. М. Ахтямов, З. Ф. Аксенова // Вестник Башкирского университета. – 2014. Т. 19. – № 1. – С. 158–163.

11. Ахтямов, А. М. Идентификация условий замыкания провода по собственным частотам колебаний напряжения переменного тока / А. М. Ахтямов, Л. С. Ямилова // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2006. – Т. 11. – № 2–3. – С. 15–17.
12. Баранова, Е. А. О восстановлении дифференциальных операторов высших порядков по системе их спектров / Е. А. Баранова // Доклады Академии Наук. – 1972. – Т. 205. – № 6. – С. 1271–1273.
13. Басакер, Р. Конечные сети и графы / Р. Басакер, Т. Саати. – Москва: Наука. 1974. – 368 с.
14. Белов, В. В. Теория графов / В. В. Белов, Е. М. Воробьев, В. Е. Шаталов. – Москва: Высшая школа, 1976. – 392 с.
15. Будаков, Б. М. Сборник задач по математической физике / Б. М. Будаков, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов – Москва: Наука, 1980. – 688 с.
16. Бутерин, С. А. Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов на конечном интервале / С. А. Бутерин, В. А. Юрко // Вестник Башкирского университета. – 2006. – № 4. – С. 8–12.
17. Бухгейм, А. Л. Введение в теорию обратных задач / А. Л. Бухгейм. – Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1988. – 184 с.
18. Валеев, Н. Ф. О плотности дискретного спектра сингулярного оператора Штурма–Лиувилля / Н. Ф. Валеев // Математические заметки. – 2002. – Т. 71. – № 2. – С. 307–311.
19. Валеев, Н. Ф. Об одной модели управления собственными колебаниями динамических систем / Н. Ф. Валеев // Вестник УГАТУ. – 2008. – Т. 10. – № 2. – С. 142–149.
20. Валеев, Н. Ф. Обратная спектральная задача для конечномерных операторов / Н. Ф. Валеев // Уфимский математический журнал. – 2010. – Т. 2. – № 2. – С. 3–19.
21. Валеев, Н. Ф. Регулярные решения многопараметрической обратной спектральной задачи / Н. Ф. Валеев // Математические заметки. – 2009. – Т. 85. – № 6. – С. 940–943.

22. Валеев, Н. Ф. Решение модельной обратной спектральной задачи для оператора Штурма–Лиувилля на графе / Н. Ф. Валеев, Ю. В. Мартынова, Я. Т. Султанаев // Вычислительные методы и программирование. – 2016. – Т. 17. – С. 204–211.

23. Валеев, Н. Ф. Об обратной спектральной задаче для дискретного оператора Штурма–Лиувилля / Н. Ф. Валеев, Э. Р. Нугуманов, С. А. Рабцевич // Труды института математики с ВЦ УНЦ РАН. Выпуск 1. – 2008. – С. 28–35.

24. Валеев, Н. Ф. О задаче определения параметров граничных условий оператора Штурма–Лиувилля по спектру / Н. Ф. Валеев, Э. Р. Нугуманов, С. А. Рабцевич // Вестник СамГУ. Естественная серия. – 2009. – № 6(72). – С. 12–20.

25. Валеев, Н. Ф. Об асимптотическом поведении решений сингулярного дифференциального уравнения Штурма–Лиувилля / Н. Ф. Валеев, Я. Т. Султанаев // Доклады Академии Наук. – 1994. – Т. 335. – № 6. – С. 681–683.

26. Валеев, Н. Ф. Спектральные свойства оператора Штурма–Лиувилля в пространстве вектор–функций / Н. Ф. Валеев, Я. Т. Султанаев // Математические заметки. – 1999. – Т. 65. – № 6. – С. 932–938.

27. Валеев, Н. Ф. Обратные спектральные задачи в теории идентификации линейных динамических систем / Н. Ф. Валеев, М. Г. Юмагулов // Автоматизация и телемеханика. – 2009. – № 11. – С. 13–20.

28. Винокуров, В. А. Собственное значение и след оператора Штурма–Лиувилля как дифференциальные функции суммируемого потенциала / В. А. Винокуров, В. А. Садовничий // Доклады Академии Наук. – 1999. – Т. 365. – № 3. – С. 295–297.

29. Вольперт, А. И. Дифференциальные уравнения на графах / А. И. Вольперт // Математический сборник. – 1972. – Т. 88. – № 4. – С. 578–588.

30. Гельфанд, И. М. Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами / И. М. Гельфанд // Доклады Академии Наук. – 1950. – Т. 73. – С. 117–120.

31. Гельфанд, И. М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции / И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан // Известия АН СССР. Серия Математика. – 1951. – Т. 15. – С.309–360.
32. Герасименко, Н. И. Обратная задача рассеяния на некомпактном графе / Н. И. Герасименко // Теоретическая математическая физика. – 1988. – Т. 74. – № 2. – С. 187–200.
33. Глэдвелл, Г. Обратные задачи теории колебаний / Г. Глэдвелл. – Москва–Ижевск: Изд-во РХД, 2008. – 610 с.
34. Губреев, Г. М. Спектральный анализ задачи Редже с параметрами / Г. М. Губреев, В. Н. Пивоварчик // Функциональный анализ и его приложения. – 1997. – № 1. – С. 70–74.
35. Гусейнов, Г. Ш. О спектральном анализе квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля / Г. Ш. Гусейнов // Доклады Академии Наук СССР. – 1985. – Т. 285. – № 6. – С. 1292–1296.
36. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – Москва: Изд-во МГУ, 1994. – 206 с.
37. Захарьев, Б. Н. Послушная квантовая механика. Новый статус теории в подходе обратной задачи / Б. Н. Захарьев, В. М. Чабанов. – Москва: Институт компьютерных исследований, 2002. – 300 с.
38. Ильин, В. А. Волновое уравнение с граничным управлением на одном конце при закреплённом втором конце / В. А. Ильин // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35. – № 12. – С. 1640–1659.
39. Исаев, Г. А. К многопараметрической спектральной теории / Г. А. Исаев // Доклады Академии наук СССР. – 1976. – Т. 229. – № 2. – С. 284–286.
40. Исаев, Г. А. О сингулярных многопараметрических дифференциальных операторах. Теоремы разложения / Г. А. Исаев // Математический сборник. – 1986. – Т. 131(173). – № 1 (9). – С. 52–72.
41. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – Москва: Физматлит, 1961. – 576 с.
42. Келдыш, М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений / М. В. Келдыш // Доклады Академии наук. 1951. – Т.77. – № 1. – С.11–14.

43. Коддингтон, Э. А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1958. – 325 с.
44. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями) / Л. Коллатц. – Москва: Наука, 1968. – 503 с.
45. Костюченко, А. Г. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения / А. Г. Костюченко. – Киев: Наукова думка, 1977. – 332 с.
46. Костюченко, А. Г. К теории самосопряженных квадратичных пучков операторов / А. Г. Костюченко, А. А. Шкаликов // Функциональный анализ и его приложения. – 1983. – Т. 17. – № 2. – С. 38–61.
47. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др. – Москва: Наука, 1969. – 456 с.
48. Крейн, М. Г. Решение обратной задачи Штурма–Лиувилля / М. Г. Крейн // Доклады Академии наук. – 1951. – Т.76. – № 1. – С.21–24.
49. Левитан, Б. М. Некоторые вопросы спектральной теории самосопряжённых дифференциальных операторов / Б. М. Левитан // Успехи математических наук. – 1956. – Т.11. – № 6 (72). – С.117–144.
50. Левитан, Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля / Б. М. Левитан. – Москва: Наука, 1984. – 240с.
51. Левитан, Б. М. Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка / Б. М. Левитан. – Москва–Ленинград: Издательство Академии Наук СССР, 1950. – 159 с.
52. Левитан, Б. М. Определение дифференциального уравнения по двум спектрам / Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов // Успехи математических наук. – 1964. – Т.19. – № 2(116). – С.3–63.
53. Левитан, Б. М. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака / Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. – Москва: Наука, 1988. – 432 с.
54. Мартынова, Ю. В. Модельная обратная спектральная задача для оператора Штурма–Лиувилля на геометрическом графе / Ю. В. Мартынова // Вестник Башкирского университета. – 2011. – Т.16. – № 1. – С. 4–10.
55. Мартынова, Ю. В. Модельная обратная спектральная задача для оператора Штурма–Лиувилля на геометрическом графе типа «дерево» /

Ю. В. Мартынова // Системы управления и информационные технологии. – 2013. – № 3(53). – С. 19–23.

56. Марченко, В. А. Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка / В. А. Марченко // Доклады Академии наук. – 1950. – Т. 72. – № 3. – С.457–460.

57. Марченко, В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения / В. А. Марченко. – Киев: Наукова думка, 1977. – 332 с.

58. Марченко, В. А. Спектральная теория операторов Штурма – Лиувилля / В. А. Марченко. – Киев: Наукова думка, 1972. – 219 с.

59. Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. – Москва: Наука, 1976. – 391 с.

60. Наймарк, М. А. Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – Москва: Наука, 1969. – 526 с.

61. Оре, О. Теория графов / О. Оре. – Москва: Наука, 1968. – 352 с.

62. Отелбаев, М. О. К асимптотическим формулам собственных чисел оператора Штурма–Лиувилля / М. О. Отелбаев // Доклады Академии Наук СССР. – 1981. – Т. 259. – № 1. – С.42–44.

63. Отелбаев, М. О. К формулам распределения собственных чисел сингулярных дифференциальных операторов / М. О. Отелбаев, Я. Т. Султанов // Математические заметки. 1973. – Т. 14. – № 3. – С. 361–368.

64. Павлов, Б. С. Модель свободных электронов и задача рассеяния / Б. С. Павлов, М. Д. Фаддеев // Теоретическая и математическая физика. – 1983. – Т. 55. – № 2. – С. 257–269.

65. Пенкин, О. М. О краевой задаче на графе / О. М. Пенкин, Ю. В. Покорный // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 4. – С. 701–703.

66. Пенкин, О. М. О некоторых качественных свойствах уравнений на одномерном клеточном комплексе / О. М. Пенкин, Ю. В. Покорный // Математические заметки. – 1996. – Т. 59. – № 5. – С. 777–780.

67. Петровский, И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И. Г. Петровский. – Москва: ГТТИ, 1950. – 304 с.

68. Пивоварчик, В. Н. Восстановление потенциала уравнения Штурма–Лиувилля по трем спектрам краевых задач / В. Н. Пивоварчик // Функциональный анализ и его приложения. – 1999. – Т. 33. – № 3. – С. 87–90.

69. Пивоварчик, В. Н. Теорема Амбарцумяна для краевой задачи Штурма–Лиувилля на звездообразном графе / В. Н. Пивоварчик // Функциональный анализ и его приложения. – 2005. – Т. 39. – № 2. – С. 78–81.
70. Пивоварчик, В. Н. Обратная задача Штурма – Лиувилля с зависящими от спектрального параметра краевыми условиями / В. Н. Пивоварчик, К. Ван Дер Мей // Функциональный анализ и его приложения. – 2002. – Т. 36. – № 4. – С. 74–77.
71. Повзнер, А. Я. О дифференциальных уравнениях типа Штурма – Лиувилля на полуоси / А. Я. Повзнер // Математический сборник. – 1948. – Т. 23 – № 65. – С. 3–52.
72. Покорный, Ю. В. О спектре некоторых задач на графах / Ю. В. Покорный // Успехи математических наук. – 1987. – Т. 42. № 4. – С. 128–129.
73. Покорный, Ю. В. Теоремы Штурма для уравнений на графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин // Доклады Академии Наук СССР. – 1989. – Т. 309. – № 6. – С. 1306–1308.
74. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др. – Москва: Физматлит, 2005. – 269 с.
75. Покорный, Ю. В. О распределении нулей собственных функций задачи Штурма–Лиувилля на пространственной сети / Ю. В. Покорный, В. Л. Прядиев // Доклады РАН. – 1999. – Т. 364. № 3. – С. 316–318.
76. Понтрягин, Л. С. Дифференциальные уравнения и их приложения / Л. С. Понтрягин. – Москва: Наука, 1974. – 208 с.
77. Рид, М. Методы современной математической физики. Том 1. Функциональный анализ / М. Рид, Б. Саймон. – Москва: Мир, 1982. – 357 с.
78. Садовничий, В. А. Единственность решения обратной задачи для уравнения второго порядка с нераспадающимися краевыми условиями / В. А. Садовничий // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 1974. – № 1. – С. 143–151.

79. Садовничий, В. А. Единственность решения обратной задачи в случае уравнения второго порядка с нераспадающимися условиями, регуляризованные суммы части собственных чисел. Факторизация характеристического определителя / В. А. Садовничий // Доклады Академии Наук. – 1972. – Т. 206. – № 2. – С. 293–296.

80. Садовничий, В. А. Теорема единственности решения обратной задачи спектрального анализа в случае дифференциального уравнения с периодическими граничными условиями / В. А. Садовничий // Дифференциальные уравнения. – 1973. – Т. 9. – № 2. – С. 271–277.

81. Садовничий, В. А. Аналогии теоремы единственности Борга в случае нераспадающихся краевых условий / В. А. Садовничий, Я. Т. Султанаев, А. М. Ахтямов // Доклады Академии Наук. – 1999. – Т. 367. – № 6. – С. 739–741.

82. Садовничий, В. А. О корректности обратной задачи Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями / В. А. Садовничий, Я. Т. Султанаев, А. М. Ахтямов // Доклады Академии Наук.. – 2004. – Т. 395. – № 5. – С. 592–595.

83. Садовничий, В. А. Обратная задача Штурма–Лиувилля с обобщенными периодическими краевыми условиями / В. А. Садовничий, Я. Т. Султанаев, А. М. Ахтямов // Доклады Академии Наук. – 2008. – Т. 421. – № 5. – С. 599–601.

84. Садовничий, В. А.. Обратная задача Штурма–Лиувилля. Теоремы единственности и контрпримеры / В. А. Садовничий, Я. Т. Султанаев, А. М. Ахтямов // Доклады Академии Наук. – 2006. – Т. 411. – № 6. – С. 747–750.

85. Садовничий, В. А. Обратные задачи Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями / В. А. Садовничий, Я. Т. Султанаев, А. М. Ахтямов. – Москва: Изд-во МГУ, 2009. – 184 с.

86. Садовничий, В. А. Разрешимость обратной задачи Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями / В. А. Садовничий, Я. Т. Султанаев, А. М. Ахтямов // Доклады Академии Наук. – 2007. – Т. 412. – № 1. – С. 26–28.

87. Садовничий, В. А. Решение обратной задачи Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. I. / В. А. Садовничий, Я. Т. Султанаев, А. М. Ахтямов // Евразийский математический журнал. – 2005. – № 2. – С. 100–118.

88. Садовничий, В. А. Решение обратной задачи Штурма–Лиувилля с нераспадающимися краевыми условиями. II. / В. А. Садовничий, Я. Т. Султанаев, А. М. Ахтямов // Евразийский математический журнал. – 2005. – № 3. – С. 99–117.

89. Садовничий, В. А. Многопараметрические обратные спектральные задачи и их приложения / В. А. Садовничий, Я. Т. Султанаев, Н. Ф. Валеев // Доклады Академии Наук. – 2009. – Т. 426. – № 4. – С. 457–460.

90. Станкевич, И. В. Об одной обратной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла / И. В. Станкевич // Доклады Академии Наук. – 1970. – Т. 192. – № 1. – С. 34–37.

91. Султанаев, Я. Т. Асимптотика дискретного спектра одномерных дифференциальных операторов / Я. Т. Султанаев // Дифференциальные уравнения. – 1974. – Т. 10. – № 11. – С. 2010–2020.

92. Султанаев, Я. Т. К формулам распределения собственных чисел неполуограниченного оператора Штурма–Лиувилля / Я. Т. Султанаев, Х. Х. Муртазин // Математические заметки. – 1980. – Т. 28. – № 4. – С. 545–553.

93. Титчмарш, Е. Теория функций / Е. Титчмарш. – Москва: Наука, 1980. – 464 с.

94. Тихонов, А. Н. О единственности решения задачи электроразведки / А. Н. Тихонов // Доклады Академии Наук СССР. – 1949. – Т. 69. – № 6. – С. 797–800.

95. Численные методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола. – Москва: Наука, 1990. – 232 с.

96. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – Москва: Наука, 1977. – 660 с.

97. Филиппов, А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов. – Москва: Наука, 1985. – 224 с.

98. Халмош, П. Конечномерные векторные пространства / П. Халмош. – Москва: Физматлит, 1963. – 263 с.
99. Шабат, А. Б. Обратная задача рассеяния / А. Б. Шабат // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15. № 10. С. 1824–1834.
100. Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Функциональный анализ и его приложения. – 1982. – Т. 16. – № 4. – С. 92–93.
101. Юрко, В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач / В. А. Юрко. – Москва: Физматлит, 2007. – 384 с.
102. Юрко, В. А. О краевых задачах с параметром в краевых условиях / В. А. Юрко // Известия АН АрмССР. Математика. – 1984. – Т. 19. – № 5. – С. 398–409.
103. Юрко, В. А. Обратная задача для дифференциальных операторов / В. А. Юрко. – Саратов: Издательство Саратовского университета, 1989. – 176 с.
104. Юрко, В. А. Обратная задача для дифференциальных операторов второго порядка с регулярными краевыми условиями / В. А. Юрко // Математические заметки. – 1975. – Т. 18. – № 4. – С. 569–576.
105. Юрко, В. А. Обратные спектральные задачи и их приложения / В. А. Юрко. – Саратов: Изд-во Саратовск. педагогич. ин-та, 2001. – 499 с.
106. Ягола, А. Г. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике / А. Г. Ягола, Я. Ван, И. Э. Степанова, В. Н. Титаренко. – Москва: Бином, 2014. – 216 с.
107. Atkinson, F. V. Multiparameter eigenvalue problems: Matrices and compact operators / F. V. Atkinson. – New York and London: Academic Press. 1972. – 558 p.
108. Below, J. Sturm – Liouville eigenvalue problems on networks / J. Below // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 1988. – V. 10. – P. 383–395.
109. Benedek, A. On inverse eigenvalue problems for a second-order differential equations with parameter contained in the boundary conditions / A. Benedek, R. Panzone // Notas de Algebra y Analisis. – 1980. – № 9. – P. 1–13.

110. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe: Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte / G. Borg // *Acta Mathematica*. – 1946. – V.78. – № 1. – P. 1–96.
111. Browne, P.J. Inverse multiparameter eigenvalue problems for matrices / P. J. Browne, B. D. Sleeman // *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*. – 1988. – V. 31. – P. 151–155.
112. Carlson, R. Inverse eigenvalue problems on directed graphs / R. Carlson // *Transactions of the American Mathematical Society*. – 1999. – V. 351. – № 10. – P. 4069–4088.
113. Chu, M. T. *Inverse Eigenvalue Problems: Theory. Algorithms and Applications* / M. T. Chu, G. H. Golub. – Oxford University Press. 2005. – 408 p.
114. Chu, M. T. Structured inverse eigenvalue problems / M. T. Chu, G. H. Golub // *Acta Numerica*. – 2002. – № 11. – P. 1–71.
115. Eastham, M. Eigenvalue problems with the parameter in the boundary condition // *The Quarterly Journal of Mathematics* / M. Eastham. – 1963. – V. 14 – P. 259–272.
116. Etkin, A. E. Some boundary value problems with a spectral parameter in the boundary conditions / A. E. Etkin // *American Mathematical Society Translations*. – 1987. – V. 136. – P. 35–41.
117. Fulton, C. T. Two-point boundary value problems with eigenparameter contained in the boundary conditions / C. T. Fulton // *Royal Society of Edinburgh*. 1977. – V. 77. – P. 293–308.
118. Hochstenbach, M. E. Backward error, condition numbers, and pseudospectrum for the multiparameter eigenvalue problem / M. E. Hochstenbach, B. Plestenjak // *Linear Algebra and its Applications*. – 2003. – № 375. – P. 63–81.
119. Kong, Q. Sturm – Liouville Problems with Finite Spectrum / Q. Kong, H. Wu, A. Zettl // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. – 2001. – № 263. – P. 748–762.
120. Kosir, T. Root Vector for Geometrically Simple Multiparameter Eigenvalues / T. Kosir // *Integral Equations and Operator Theory*. – 2004. – № 48 – P. 365–396.

121. Kurasov, P. On the inverse scattering problem on branching graphs / P. Kurasov, F. Stenberg // Journal of Physics, Mathematical and General. – 2002. – V. 35. – P. 101–121.
122. Levinson, N. The inverse Sturm–Liouville problem / Levinson // Norsk Matematisk Tidsskrift. – 1949. – T.8. – P.25–30.
123. Lumer, G. Connecting of local operators and evolution equations on net–work / G. Lumer // Lect. Notes Math. Berlin: Springer. – 1980. – V. 787. – P. 219–234.
124. Nicaise, S. Estimees du spectre du laplasien sur un reseau topologique finite / S. Nicaise // Comptes Rendus de l’Academie des Sciences. – 1986. – T. 303. – № 8. – P. 343–346.
125. Nicaise, S. Some results on spectral theory over networks. applied to nerve impuls transmission / S. Nicaise // Lect. Notes Math. Berlin: Springer. – 1985. – V. 1771. – P. 532–541.
126. Pivovarchik, V. N. Inverse problem for the Sturm–Liouville equation on a simple graph / V. N. Pivovarchik // Journal on Mathematical Analysis. – 2000. – V. 32. – № 4. – P. 801–819.
127. Plestenjak, B. A continuation method for a right definite two–parameter eigenvalue problem / B. Plestenjak // Journal on Matrix Analysis and Applications. – 2000. – № 21 (4). – P. 1163–1184.
128. Roth, J.-P. Le spectre du laplasien sur un graphe /J.-P. Roth // Lect. Notes Math. Berlin: Springer. – 1984. – V. 1096. – P. 521–539.
129. Volkmer, H. Eigenvalue problems of Atkinson, Feller and Krein and their mutual relationship / H. Volkmer // Electronic Journal of Differential Equations. – 2005. – № 48. – P. 1–15.
130. Volkmer, H. Inverse spectral theory for Sturm–Liouville problems with finite spectrum / H. Volkmer, A. Zettl // Proceedings of Americal Mathematical Society. –2007. – V. 135. – № 4. – P. 1129–1132.

Блок-схема разработанного алгоритма

