

На правах рукописи



МАРТЫНОВА Юлия Валерьевна

ОБРАТНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА  
ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ ТИПА «ДЕРЕВО»  
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Специальность:

05.13.18 – Математическое моделирование, численные  
методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Уфа – 2017

Работа выполнена на кафедре математики и статистики  
ФГБОУ ВО «Башкирский государственный педагогический университет  
им. М.Акмуллы»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профес-  
сор **Султанаев Яудат Талгатович**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профес-  
сор **Кадченко Сергей Иванович**,  
ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный  
технический университет имени Г.И. Носова»,  
г. Магнитогорск

доктор физико-математических наук, профес-  
сор **Болотнов Анатолий Миронович**,  
ФГБОУ ВО «Башкирский государственный  
университет», г. Уфа

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Московский государственный  
университет имени М. В. Ломоносова»,  
г. Москва

Защита состоится 29 марта 2017 г. в 10<sup>00</sup> часов на заседании диссертацион-  
ного совета Д 212.288.06 при ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиа-  
ционный технический университет» по адресу: 450008, г. Уфа, ул. К. Маркса,  
д. 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Уфим-  
ский государственный авиационный технический университет» и на сайте  
[www.ugatu.ac.ru](http://www.ugatu.ac.ru).

Автореферат разослан «        » февраля 2017 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук,  
профессор



Г.Т. Булгакова

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы исследования

Методы математического моделирования играют важную роль при исследовании частотно-резонансных характеристик различных технических устройств, описываемых линейными динамическими системами, и вычислительной диагностики технических систем по частотам собственных колебаний. При этом, как правильно, математической моделью служат краевые задачи Штурма – Лиувилля на графах.

В диссертации рассматривается дифференциальный оператор Штурма – Лиувилля, заданный на геометрическом графе типа «дерево», и ставится задача нахождения параметров граничных условий по заданным собственным значениям – обратная спектральная задача. Рассматриваемая задача является математической моделью колебаний электрического тока или напряжения в электрической сети.

Впервые обратная спектральная задача для оператора Штурма – Лиувилля на интервале была поставлена и решена В. А. Амбарцумяном в 1929 году. В дальнейшем теория обратных спектральных задач для оператора Штурма – Лиувилля на интервале получила свое развитие в работах Крейна М. Г., Марченко В. А., Левитана Б. М., Садовниченко В. А., Г. М. Л. Глэдвелла, Муди Т. Чу и других авторов. Прямые спектральные задачи для дифференциальных операторов на графах и их свойства изучались в работах Покорного Ю. В. Обратные спектральные задачи на графах рассматривались в работах Юрко В. А. и его учеников, в них восстанавливались преимущественно коэффициенты дифференциальных операторов с использованием нескольких полных спектров.

Обратные задачи идентификации краевых условий рассматривались в работах Ахтямова А. М. и его учеников. В частности, была рассмотрена задача диагностики закреплений и нагруженности тупиковых вершин геометрического графа из струн и условий заземления электрических сетей по собственным частотам колебаний. Однако, в этих работах для решения задачи по восстановлению параметров требовалось использовать собственных значений больше, чем количество параметров, что означает избыточность данных.

Нами предложен новый метод решения подобных задач, при котором количество восстанавливаемых параметров и количество собственных значений совпадает.

### Цель работы

Целью настоящей работы является математическое моделирование частотно-резонансных характеристик в электрической сети на геометрическом графе типа «дерево». Данной модели соответствует обратная спектральная задача по восстановлению параметров граничных условий по конечному набору заданных собственных значений.

В соответствии с поставленной целью формулируются и решаются следующие задачи:

1. Разработать математическую модель колебательных процессов в электрической сети на геометрическом графе типа «дерево» в виде пучка линейных дифференциальных операторов, действующих в гильбертовом пространстве.

2. Исследовать монотонную зависимость собственных значений операторного пучка от параметров граничных условий, на которой базируется разработанный алгоритм решения.

3. Редуцировать поставленную задачу к обратной спектральной задаче для операторов в конечномерном пространстве.

4. Разработать и обосновать алгоритм численного метода решения полученной обратной спектральной задачи для операторов в конечномерном пространстве.

5. Создать комплекс программ, реализующих предложенный алгоритм, позволяющий провести расчет параметров граничных условий по конечному набору заданных собственных значений для единичного проводника и для соединения типа «звезда».

#### **Методы исследования**

В диссертационной работе для математической модели колебательных процессов в электрической сети на геометрическом графе типа «дерево» разработан численный метод решения обратной спектральной задачи по восстановлению параметров граничных условий по конечному набору заданных собственных значений, основанный на доказанном свойстве монотонной зависимости собственных значений от параметров граничных условий. Использовались также методы решения систем нелинейных уравнений, теории дифференциальных уравнений, теории целых функций, теории обратных задач, вычислительной математики, математического анализа, линейной алгебры. Для реализации построенных численно-аналитических алгоритмов использовался математический пакет MATLAB.

**Достоверность научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации**, обеспечивается математическими доказательствами теорем, сравнением полученных результатов разработанных численных алгоритмов расчета с аналитическими решениями для модельных задач, а также результатами других авторов.

#### **Научная новизна работы**

1. Впервые предложен метод математического моделирования колебательных процессов в электрической сети на геометрическом графе типа «дерево» в виде пучка линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Данный метод отличается от известных тем, что позволяет определить  $m$  неизвестных параметров граничных условий с помощью ровно  $m$

собственных значений. (п.1 паспорта специальности 05.13.18 – Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений).

2. Разработан и обоснован новый численный алгоритм вычисления параметров граничных условий по конечному набору заданных собственных значений, апробированный на аналитических решениях модельных задач. (п.4 паспорта специальности 05.13.18 – Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента).

3. Разработан комплекс программ, позволяющий провести расчет параметров граничных условий по конечному набору заданных собственных значений для единичного проводника и для соединения типа «звезда», которые могут расширены на любой граф типа «дерево». Проведена проверка адекватности результатов вычислительного эксперимента с помощью сравнения результатов с аналитическими решениями. (п.8 паспорта специальности 05.13.18 – Разработка систем компьютерного и имитационного моделирования).

#### **Теоретическая и практическая значимость результатов**

Для математической модели колебательных процессов в электрической сети на геометрическом графе типа «дерево» доказана монотонная зависимость собственных значений от параметров граничных условий, на основе которой строится численный алгоритм вычисления параметров граничных условий по конечному набору заданных собственных значений.

Полученные результаты позволяют восстанавливать параметры граничных условий, например, распределенные индуктивность и емкость, соединенные последовательно, для электрических сетей на геометрическом графе типа «дерево» на участках труднодоступных для визуального осмотра, а также подбирать параметры граничных условий для обеспечения нужного спектра частот колебаний переменного тока или напряжения в сети.

#### **Положения диссертации, выносимые на защиту:**

1. Математическая модель колебательных процессов в электрической сети на геометрическом графе типа «дерево» с однородными ребрами и граничными условиями в виде пучка линейных дифференциальных операторов, действующих в гильбертовом пространстве.

2. Монотонная зависимость собственных значений операторного пучка от параметров граничных условий, на которой базируется разработанный алгоритм решения.

3. Сведение поставленной задачи к обратной спектральной задаче для операторов в конечномерном пространстве.

4. Алгоритм численного метода решения полученной обратной спектральной задачи для операторов в конечномерном пространстве, основанный на монотонной зависимости собственных значений от параметров граничных

условий краевой задачи.

5. Комплекс программ в среде MATLAB для расчета параметров граничных условий по конечному набору заданных собственных значений для единичного проводника и для соединения типа «звезда», которые могут расширены на любой граф типа «дерево».

### **Апробация результатов работы**

Основные результаты диссертационной работы были представлены и обсуждались на всероссийских и международных конференциях:

- Всероссийская молодежная научно-практическая конференция «Актуальные вопросы науки и образования», Уфа, 25–27 апреля 2013 года;
- Международная научная конференция «Нелинейный анализ и спектральные задачи», Уфа, 18–22 июня 2013 года;
- Международная научная конференция «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ», Уфа, 24–26 сентября 2014 года;
- Международная научная школа «Парадигма», Варна, Республика Болгария, 20-23 августа 2015 года;
- Международная научная конференция «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ», Уфа, 1–3 октября 2015 года;
- Международный научный семинар по обратным и некорректно поставленным задачам, Москва, 19–21 ноября 2015 года;
- Уфимская математическая конференция с международным участием, Уфа, 27–30 сентября 2016 года;
- Научный семинар Института математики с ВЦ УНЦ РАН под руководством д.ф.-м.н., профессора Жиберова А. В., д.ф.-м.н., профессора Хабидуллиной И. Т.;
- Научный семинар Башкирского государственного университета под руководством д.ф.-м.н., профессора Юмагулова М. Г., д.ф.-м.н., профессора Фазуллина З. Ю.;
- Научный семинар Башкирского государственного педагогического университета под руководством д.ф.-м.н., профессора Султанаева Я. Т.).

Диссертационная работа была выполнена при поддержке грантов РФФИ 12-01-00567а «Качественные методы спектральной теории и их приложения», РФФИ 15-01-01095а «Прямые и обратные задачи спектральной теории дифференциальных операторов», государственного задания Министерства образования и науки Российской Федерации «Асимптотики и спектры в краевых задачах математической физики».

### **Личный вклад**

В совместных публикациях Я. Т. Султанаева и Н. Ф. Валееву принадлежит постановка задач, а Ю. В. Мартыновой – построение математических моделей, разработка аналитических и численных методов решения поставленных задач, а также создание комплексов программ.

## Публикации

Основные результаты опубликованы в 10 работах, 3 из которых изданы в журналах, входящих в перечень Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации. Получено свидетельство о регистрации электронного ресурса.

## Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем диссертации 88 страниц текста. Список литературы содержит 130 наименований.

## Благодарности

Исследования, представленные в диссертационной работе, проведены под руководством Султанаева Яудата Талгатовича и Валеева Нурмухамета Фуатовича, которым автор выражает глубокую признательность и благодарность за научные консультации, внимание и помощь, оказанные при выполнении работы.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы, излагаются методы исследования, основные положения, выносимые на защиту. Представлен обзор научной литературы по изучаемой проблеме, проведен анализ работ, близких к теме диссертации, из зарубежных и отечественных источников, на основе которого выделены основные этапы развития теории обратных спектральных задач для дифференциальных операторов и их приложений.

В **первой главе** рассмотрен вывод уравнения колебаний для единичного проводника с распределенной емкостью  $C$  и индуктивностью  $L$ , заземленного с обоих концов через индуктивность  $L_i$ ,  $i = 0, 1$ , и емкость  $C_i$ ,  $i = 0, 1$ , соединенные последовательно (рисунок 1).

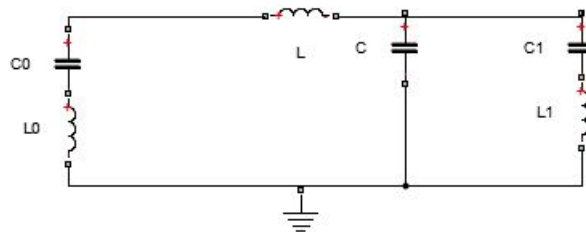


Рисунок 1 – Принципиальная схема для единичного проводника

Соответствующая краевая задача имеет вид:

$$U_{xx} = CLU_{tt}, 0 < x < 1, t > 0, \quad (1)$$

$$U_x(0; t) - L_0CU_{tt}(0; t) - \frac{1}{C_0}CU(0; t) = 0. \quad (2)$$

$$U_x(1; t) + L_1 C U_{tt}(1; t) + \frac{1}{C_1} C U(1; t) = 0. \quad (3)$$

Далее рассматривается электрическая сеть из проводников в виде произвольного графа типа «дерево», который не содержит циклов.

На каждом из  $P$  линейных фрагментов сети, представляющих собой ребра графа, задается уравнение электрических колебаний в проводнике длиной  $l_k$  с распределенными емкостью  $C_k$  и индуктивностью  $L_k$ :

$$(U_k)_{x_k x_k}(x_k; t) = C_k L_k (U_k)_{tt}, x_k \in (0; l_k), k = \overline{1, P}. \quad (4)$$

Проводник, пронумерованный от 1 до  $N$ , заземлен через сосредоточенные индукцию  $\tilde{L}_k$  и емкость  $\tilde{C}_k$ , соединенные последовательно, причем ток по этим ребрам течет в направлении, обратном направлению возрастания  $U_k$ . Тогда граничные условия имеют вид:

$$(U_k)_{x_k}(l_k; t) + C_k \tilde{L}_k (U_k)_{tt}(l_k; t) + \frac{C_k}{\tilde{C}_k} (U_k)(l_k; t), k = \overline{1, N}. \quad (5)$$

В каждой из  $M = P + 1 - N$  внутренних вершин задаются условия непрерывности потенциала и условия баланса токов, известные как законы Кирхгофа.

Для внутренней  $(N + 1)$ -й вершины, соединенной с  $D_1$  граничными вершинами имеем:

$$\begin{cases} U_1(0; t) = \dots = U_{D_1}(0; t) = U_{N+1}(0; t), \\ \sum_{i=1}^{D_1} (U_i)_{x_i}(0; t) + (U_{N+1})_{x_{N+1}}(0; t) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Для внутренней  $(N + j)$ -й вершины, соединенной с  $D_j$  граничными вершинами,  $j = \overline{2, M - 1}$ , имеем:

$$\begin{cases} U_{D_1+\dots+D_{j-1}+1}(0; t) = \dots = U_{D_1+\dots+D_j}(0; t) = \\ = U_{N+j-1}(l_{N+j-1}; t) = U_{N+j}(0; t), \\ \sum_{i=D_1+\dots+D_{j-1}+1}^{D_1+\dots+D_j} (U_i)_{x_i}(0; t) - \\ -(U_{N+j-1})_{x_{N+j-1}}(l_{N+j-1}; t) + (U_{N+j})_{x_{N+j}}(0; t) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Для внутренней  $(N + M)$ -й вершины, соединенной с  $D_M$  граничными вершинами имеем:

$$\begin{cases} U_{D_1+\dots+D_{M-1}+1}(0; t) = \dots = U_{D_1+\dots+D_M}(0; t) = U_P(l_P; t), \\ \sum_{i=D_1+\dots+D_{M-1}+1}^{D_1+\dots+D_M} (U_i)_{x_i}(0; t) - (U_P)_{x_P}(l_P; t) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Получена соответствующая краевая задача на собственные значения:

$$a_k^2 y_k''(x_k) + \lambda y_k(x_k) = 0, x_k \in (0; l_k), k = \overline{1, P}, \quad (9)$$

с граничными условиями

$$y_k'(l_k) + (p_{k1} + \lambda p_{k2}) y_k(l_k) = 0, k = \overline{1, N}, \quad (10)$$

и условиями во внутренних вершинах:



$$\left\{ \begin{array}{l} y_1(0) = \dots = y_{D_1}(0) = y_{N+1}(0), \\ y_{D_1+\dots+D_{j-1}+1}(0) = \dots = y_{D_1+\dots+D_j}(0) = y_{N+j-1}(l_{N+j-1}) = y_{N+j}(0), \\ \quad j = \overline{2, M-1} \\ y_{D_1+\dots+D_{M-1}+1}(0) = \dots = y_{D_1+\dots+D_M}(0) = y_P(l_P). \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{D_1} y'_i(0) + y'_{N+1}(0) = 0, \\ \sum_{i=D_1+\dots+D_{j-1}+1}^{D_1+\dots+D_j} y'_i(0) - y'_{N+j-1}(l_{N+j-1}) + y'_{N+j}(0) = 0, j = \overline{2, M-1} \\ \sum_{i=D_1+\dots+D_{M-1}+1}^{D_1+\dots+D_M} y'_i(0) - y'_P(l_P) = 0. \end{array} \right. \quad (12)$$

При этом введены обозначения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \omega^2 > 0, a_i = \frac{1}{C_i L_i} > 0, \\ p_{i1} = \frac{C_i}{\tilde{C}_i} > 0, p_{i2} = -C_i \tilde{L}_i \frac{\omega^2}{\lambda} = -C_i \tilde{L}_i, i = \overline{1, N}. \end{array} \right. \quad (13)$$

Исходя из физического смысла задачи, коэффициенты  $p_{i1}, p_{i2}, i = \overline{1, N}$ , должны быть вещественными, более того,  $p_{i1} > 0, p_{i2} < 0, i = \overline{1, N}$ .

Суть прямой спектральной задачи для краевой задачи (9)–(12) состоит в нахождении собственных значений  $\lambda$ , при которых существуют нетривиальные решения краевой задачи.

В гильбертовом пространстве  $H_1 = W_2^1(0; l_1) \times W_2^1(0; l_2) \times \dots \times W_2^1(0; l_P)$ , элементы которого удовлетворяют условиям (11)–(12), введены симметричные билинейные формы

$$Q_1[\hat{y}, \hat{z}] = \sum_{k=1}^P \int_0^{l_k} y'_k(x_k) \bar{z}'_k(x_k) dx_k + \sum_{k=1}^N p_{k1} y_k(l_k) \bar{z}_k(l_k),$$

$$Q_2[\hat{y}, \hat{z}] = \sum_{k=1}^P \frac{1}{a_k^2} \int_0^{l_k} y_k(x_k) \bar{z}_k(x_k) dx_k - \sum_{k=1}^N p_{k2} y_k(l_k) \bar{z}_k(l_k).$$

В Лемме 1 доказывается, что соответствующие положительные квадратичные формы  $Q_i[\hat{y}, \hat{y}] : H_1 \rightarrow \mathbb{C}$  являются замкнутыми, значит, порождают линейные самосопряженные операторы  $L_i : H_1 \rightarrow H_2, i = 1, 2$ , где  $H_2 = L_2(0; l_1) \times L_2(0; l_2) \times \dots \times L_2(0; l_P)$ , таким образом, что:

$$(L_i(\vec{p})\hat{y}, \hat{y}) = Q_i[\hat{y}, \hat{y}], i = 1, 2.$$

В Теореме 1 доказывается, что краевая задача (9)–(12) эквивалентна операторному уравнению вида:

$$L_1(\vec{p})\hat{y} = \lambda L_2(\vec{p})\hat{y}. \quad (14)$$

Дискретность спектра операторного уравнения (14), а значит, и краевой задачи (9)–(12) следует из компактности оператора  $L_1^{-1}(\vec{p})L_2(\vec{p})$ .

Вещественность спектра следует из самосопряженности операторов  $L_i, i = 1, 2$ , положительность спектра – из положительности квадратичных форм:

$$\lambda = \frac{(L_1(\vec{p})\hat{y}, \hat{y})}{(L_2(\vec{p})\hat{y}, \hat{y})} = \frac{Q_1[\hat{y}, \hat{y}]}{Q_2[\hat{y}, \hat{y}]} > 0. \quad (15)$$

Таким образом, спектр модельной краевой задачи (9)–(12) представляет собой дискретное множество положительных вещественных чисел. При этом собственные значения  $\lambda_k$  являются аналитическими функциями от параметров граничных условий  $p_{11}, \dots, p_{N1}, p_{12}, \dots, p_{N2}$ .

Введенные операторы  $L_1$  и  $L_2$  являются положительно определенными, следствием этого является монотонная зависимость собственных значений  $\lambda_k$  от соответствующих параметров  $p_{j1}$  и  $p_{j2}$ ,  $j = \overline{1, N}$ .

Доказывается Теорема 2, суть которой в том, что если  $\lambda = \lambda(\vec{p}) = \lambda(p_{11}, \dots, p_{2N})$  – произвольное собственное значение краевой задачи (9)–(12), то

$$\frac{\partial \lambda(\vec{p})}{\partial p_{ki}} > 0, i = 1, 2, \quad (16)$$

в области  $p_{k1} > 0$  и  $p_{k2} < 0$ ,  $k = \overline{1, N}$ .

**Вторая глава** посвящена методам решения обратной спектральной задачи для краевой задачи (9)–(12), которая состоит в нахождении вектора  $\vec{p} = (p_{11}, \dots, p_{N1}, p_{12}, \dots, p_{N2})$  коэффициентов граничных условий (10), при которых наперед заданные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N}$  являются собственными значениями краевой задачи.

С помощью подстановки фундаментальной системы решений  $k$ -го уравнения из (9):

$$y_k(x_k; \lambda) = C_1^k(\lambda, \vec{p})u_k(x_k; \lambda) + C_2^k(\lambda, \vec{p})v_k(x_k; \lambda), k = \overline{1, P} \quad (17)$$

в условия (9)–(12), получена систему из  $2P$  уравнений, которую можно представить в виде векторно-матричного уравнения:

$$B(\lambda, \vec{p})\vec{C} = [B_0(\lambda) + \sum_{k=1}^N (p_{k1}B_{k1}(\lambda) + p_{k2}B_{k2}(\lambda))]\vec{C} = 0. \quad (18)$$

Сформулирована многопараметрическая обратная спектральная задача для конечномерного оператора

$$B(\lambda, \vec{p}) = B_0(\lambda) + \sum_{k=1}^N (p_{k1}B_{k1}(\lambda) + p_{k2}B_{k2}(\lambda)), \quad (19)$$

заданного в конечномерном действительном евклидовом пространстве  $E^{2N}$ .

Требуется найти всевозможные значения вектора управления  $\vec{p} = (p_{11}, \dots, p_{N1}, p_{12}, \dots, p_{N2})$  коэффициентов граничных условий (10), при которых наперед заданные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N}$  являются собственными значениями оператора  $B(\lambda, \vec{p})$ .

Показано, что она эквивалентна нахождению такого вектора  $\vec{p} = (p_1, \dots, p_{2N}) \in R^{2N}$ , чтобы каждое из уравнений системы

$$B(\lambda_j, \vec{p})\vec{q}_j = [B_0(\lambda_j) + \sum_{k=1}^{2N} p_k B_k(\lambda_j)]\vec{q}_j = 0, j = \overline{1, 2N} \quad (20)$$

имело хотя бы одно нетривиальное решение  $\vec{q}_j \in E^{2N}$ .

Здесь параметры граничных условий  $p_{kj}$  и матрицы  $B_{kj}$ ,  $k = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, 2}$ , перенумерованы следующим образом:

$$p_{2k-1} = p_{k1}, p_{2k} = p_{k2}, B_{2k-1} = B_{k1}, B_{2k} = B_{k2}, k = \overline{1, N}.$$

Однородная система уравнений (20) относительно  $\vec{q}_j = \vec{q}(\lambda_j) \in E^{2N}$  имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю, значит, она эквивалентна системе  $2N$  алгебраических уравнений относительно неизвестных  $p_1, \dots, p_{2N}$ :

$$\det[B(\lambda_j, \vec{p})] = 0, j = \overline{1, 2N}. \quad (21)$$

Прямое исследование существования решений многопараметрической обратной спектральной задачи, их количества и нахождение всех решений для системы (21) в общем случае затруднительны, поскольку полиномиальные уравнения от переменных  $p_k$ ,  $k = \overline{1, 2N}$ , имеют сложный вид. Одним из методов решения многопараметрической обратной спектральной задачи является редукция системы (21) к системе прямых спектральных задач для операторов.

Если векторы  $\vec{q}_k \in E^{2N}$ ,  $k = \overline{1, 2N}$  и  $\vec{p} = (p_1, \dots, p_{2N})$  удовлетворяют системе уравнений (20), тогда координаты вектора управления  $p_k$ ,  $k = \overline{1, 2N}$  и вектор  $\vec{Q} = \vec{q}_1 \otimes \dots \otimes \vec{q}_{2N}$  являются решением системы совместных спектральных задач:

$$(\Delta_k + (-1)^k p_k \Delta_0) \vec{Q} = 0, k = \overline{1, 2N}. \quad (22)$$

Система (22) содержит неизвестный тензор  $\vec{Q} \in H_{2N}$ , поэтому она не всегда равносильна системе алгебраических уравнений вида:

$$\det(\Delta_k + (-1)^k p_k \Delta_0) = 0, k = \overline{1, 2N}, \quad (23)$$

например, в случае, когда (23) тождественно выполняется для всех  $p_k$ ,  $k = \overline{1, 2N}$ . В этом случае рассматривается возмущенная система совместных спектральных задач:

$$(\Delta_k(\varepsilon) + (-1)^k p_k(\varepsilon) \Delta_0(\varepsilon)) \vec{Q}(\varepsilon) = 0, k = \overline{1, 2N}. \quad (24)$$

Поскольку существует  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что для  $\forall \varepsilon, |\varepsilon| > \varepsilon_0$ , выполняется  $\det(\Delta_0(\varepsilon)) \neq 0$ , то система (24) эквивалентна системе алгебраических уравнений вида:

$$\det(\Delta_k(\varepsilon) + (-1)^k p_k \Delta_0(\varepsilon)) = 0, k = \overline{1, 2N}. \quad (25)$$

Таким образом, можно свести обратную спектральную задачу для краевой задачи (9)–(12) к системе прямых спектральных задач для операторных пучков вида (22) или (24). Данные системы являются более удобными для разработки численных методов решения.

Предложен алгоритм численного построения решений многопараметрической обратной спектральной задачи для оператора  $B(\lambda, \vec{p})$  в конечномерном евклидовом пространстве  $E^{2N}$ . Этот метод основан на монотонной зависимости собственных значений от параметров граничных условий и является аналогом метода деления отрезка пополам.

Обозначим через  $\mu_1(\vec{p}), \mu_2(\vec{p}), \dots, \mu_{2N}(\vec{p})$  собственные значения оператора  $B(\lambda, \vec{p})$  при некотором значении вектора  $\vec{p} \in [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}$ , где  $[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi} = \{\vec{x} \in R^{2N} : a_k \leq x_k \leq b_k\}$ .

Областью несуществования решений многопараметрической обратной спектральной задачи для заданных спектральных данных  $\vec{\lambda} \in R^{2N}$  будем называть область, в которой нет вектора  $\vec{p} \in R^{2N}$  такого, что  $\vec{\mu}(\vec{p}) = \vec{\lambda}$ .

В силу монотонности функции  $\vec{\mu}(\vec{p})$  сформулирована Лемма 3, согласно которой если  $\vec{\lambda} \notin [\vec{\mu}(\vec{a}), \vec{\mu}(\vec{b})]_{\Pi}$ , то параллелепипед  $[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}$  является областью несуществования решений многопараметрической обратной спектральной задачи для заданных спектральных данных.

Выделен параллелепипед, в котором необходимо найти решения многопараметрической обратной спектральной задачи  $[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}$ . Пусть точка  $\vec{c} \in [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}$  – центр параллелепипеда. Поскольку у  $2N$ -мерного параллелепипеда  $2^{2N}$  вершины, то можно сформировать  $2^{2N}$  подобластей  $[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, 2^{2N}}$  таких, что

$$\bigcap_{i=1}^{2^{2N}} [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}^{(i)} = \vec{c}, \bigcup_{i=1}^{2^{2N}} [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}^{(i)} = [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}.$$

Далее в каждом параллелепипеде  $[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, 2^{2N}}$  проверим выполнение условия  $\vec{\lambda} \notin [\vec{\mu}(\vec{a}), \vec{\mu}(\vec{b})]_{\Pi}^{(i)}$ . Если условие выполняется, то рассматриваемый параллелепипед не содержит решений, если же условие не выполняется, то по вышеописанной схеме выполняем его разбиение и переходим к следующему параллелепипеду.

Продолжив данную процедуру конечное число раз, получена локализация областей существования решения многопараметрической обратной спектральной задачи с любой необходимой точностью. Применяя итерационный метод для каждой локализованной области существования, можно уточнить решения поставленной задачи до требуемой точности.

Основное достоинство метода — он гарантированно сходится для любых непрерывных функций. Кроме того, данный алгоритм может быть распараллелен. На каждой итерации происходит уменьшение интервала неопределенности  $[\vec{a}, \vec{b}]_K$  в  $2^{2N}$  раз, тогда за  $j$  шагов интервал неопределенности уменьшится в  $2^{2Nj}$  раз. При этом для количества шагов метода  $j$  справедливо:

$$\frac{\|\vec{b} - \vec{a}\|}{2^{2Nj}} < \varepsilon; 2Nj \geq \log_2 \frac{\|\vec{b} - \vec{a}\|}{\varepsilon}; j \geq \log_{2^{2N}} \frac{\|\vec{b} - \vec{a}\|}{\varepsilon}.$$

В **третьей главе** представлены вычислительные эксперименты для модельных случаев, а именно, для единичного проводника и для соединения трех проводников типа «звезда».

Рассмотрено уравнение электрических колебаний проводника единичной длины с распределенной емкостью  $C$  и индуктивностью  $L$ , заземленного с левого через индукцию  $L_0$  и емкость  $C_0$ , соединенные последовательно, а с

правого – через индукцию  $L_1$  и емкость  $C_1$ , соединенные последовательно, в виде (1)–(3). Соответствующая краевая задача имеет вид:

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, x \in (0; 1), \quad (26)$$

с граничными условиями

$$\begin{cases} y'(0) - (p_1 + \lambda p_2)y(0) = 0, \\ y'(1) + (p_3 + \lambda p_4)y(1) = 0. \end{cases} \quad (27)$$

При этом введены обозначения согласно физическому смыслу задачи:

$$\begin{cases} \lambda = CL\omega^2 > 0, \\ p_1 = \frac{C}{C_0} > 0, p_2 = -\frac{CL_0\omega^2}{\lambda} = -\frac{L_0}{L} < 0, \\ p_3 = \frac{C}{C_1} > 0, p_4 = -\frac{CL_1\omega^2}{\lambda} = -\frac{L_1}{L} < 0. \end{cases} \quad (28)$$

Показано, что спектр краевой задачи (26)–(27) являются дискретным, вещественным и положительным.

Решение прямой спектральной задачи для краевой задачи (26)–(27) сведено к решению уравнения:

$$\left( \frac{(p_1 + \lambda p_2)(p_3 + \lambda p_4)}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda} \right) \sin \sqrt{\lambda} + (p_1 + \lambda p_2 + p_3 + \lambda p_4) \cos \sqrt{\lambda} = 0. \quad (29)$$

В пакете MATLAB с помощью встроенной функции *fzero* найдены 4 собственных значения для краевой задачи (26)–(27) при заданных значениях параметров граничных условий, а именно пусть:

$$p_1 = 1, p_2 = -2, p_3 = 3, p_4 = -4, \quad (30)$$

тогда собственными значениями являются:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.54144, \lambda_2 = 1.27087, \\ \lambda_3 &= 11.38717, \lambda_4 = 40.98364. \end{aligned} \quad (31)$$

Обратная спектральная задача краевой задачи (26)–(27), сведенная к многопараметрической обратной спектральной задаче для оператора  $B(\lambda, \vec{p})$  в конечномерном евклидовом пространстве  $E^2$ , состоит в нахождении такого вектора  $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ , чтобы каждое из уравнений системы:

$$B(\lambda_j, \vec{p}) \begin{pmatrix} A_1(\lambda_j) \\ A_2(\lambda_j) \end{pmatrix} = [B_0(\lambda_j) + \sum_{k=1}^4 p_k B_k(\lambda_j)] \begin{pmatrix} A_1(\lambda_j) \\ A_2(\lambda_j) \end{pmatrix} = 0, j = \overline{1, 4} \quad (32)$$

имело хотя бы одно нетривиальное решение  $(A_1(\lambda_j), A_2(\lambda_j))$ .

Что в свою очередь эквивалентно системе 4 алгебраических уравнений относительно неизвестных  $p_1, p_2, p_3, p_4$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{(p_1 + \lambda_j p_2)(p_3 + \lambda_j p_4)}{\sqrt{\lambda_j}} - \sqrt{\lambda_j} \right) \sin \sqrt{\lambda_j} + (p_1 + \lambda_j p_2 + \\ + p_3 + \lambda_j p_4) \cos \sqrt{\lambda_j} = 0, j = \overline{1, 4}. \end{aligned} \quad (33)$$

В пакете MATLAB решена система уравнений (33) при помощи встроенной функции *solve* при заданных  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ , значения которых определены в (31), при этом получены 6 решений, одно из которых совпадает с заданными в (30) параметрами граничных условий.

Рассмотрен метод решения обратной спектральной задачи – сведение к системе прямых спектральных задач. Введены возмущенные операторы, действующие в пространстве  $H_4 = E^2 \otimes E^2 \otimes E^2 \otimes E^2$ :

$$\Delta_0(\varepsilon) = \begin{vmatrix} B_1(\lambda_1) + \varepsilon I & B_2(\lambda_1) & B_3(\lambda_1) & B_4(\lambda_1) \\ B_1(\lambda_2) & B_2(\lambda_2) + \varepsilon I & B_3(\lambda_2) & B_4(\lambda_2) \\ B_1(\lambda_3) & B_2(\lambda_3) & B_3(\lambda_3) + \varepsilon I & B_4(\lambda_3) \\ B_1(\lambda_4) & B_2(\lambda_4) & B_3(\lambda_4) & B_4(\lambda_4) + \varepsilon I \end{vmatrix}_{\otimes},$$

и  $\Delta_k : H_4 \rightarrow H_4$ ,  $k = \overline{1, 4}$ , полученные заменой  $B_k(\lambda_j)$  на  $B_0(\lambda_j)$ , где  $\varepsilon \in R$ .

Поскольку существует  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что для  $\forall \varepsilon, |\varepsilon| > \varepsilon_0$ , выполняется  $\det(\Delta_0(\varepsilon)) \neq 0$ , то многопараметрическая обратная спектральная задача для оператора  $B(\lambda, \vec{p})$ , а значит, и обратная спектральная задача краевой задачи (26)–(27), эквивалентна системе прямых спектральных задач вида

$$(\Delta_k(\varepsilon) + (-1)^k p_k \Delta_0(\varepsilon)) \vec{Q} = 0, k = \overline{1, 4}, \quad (34)$$

которая в свою очередь равносильна системе алгебраических уравнений вида

$$\det(\Delta_k(\varepsilon) + (-1)^k p_k \Delta_0(\varepsilon)) = 0, k = \overline{1, 4}. \quad (35)$$

Программный модуль в MATLAB, разработанный Н. Ф. Валеевым и К. В. Труновым, обеспечивает ввод данных из файла, в котором хранится матрица вида:

$$\begin{pmatrix} -B_0(\lambda_1) & B_1(\lambda_1) & B_2(\lambda_1) & B_3(\lambda_1) & B_4(\lambda_1) \\ -B_0(\lambda_2) & B_1(\lambda_2) & B_2(\lambda_2) & B_3(\lambda_2) & B_4(\lambda_2) \\ -B_0(\lambda_3) & B_1(\lambda_3) & B_2(\lambda_3) & B_3(\lambda_3) & B_4(\lambda_3) \\ -B_0(\lambda_4) & B_1(\lambda_4) & B_2(\lambda_4) & B_3(\lambda_4) & B_4(\lambda_4) \end{pmatrix}.$$

Размерность  $n = 2$  матриц  $B_i(\lambda)$ , их количество  $m = 4$  и точность определяемых параметров  $\varepsilon = 0.001$  вводится в соответствующем диалоговом окне. В результате работы программы определяются  $n^m = 2^4 = 16$  векторов  $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ , один из которых совпадает с заданными в (30) параметрами граничных условий:

$$\dots, p_1 = 3.00050, p_2 = -3.97253, p_3 = 0.99799, p_4 = -1.98709, \dots$$

Представлен алгоритм численного построения решений многопараметрической обратной спектральной задачи для оператора  $B(\lambda, \vec{p})$  в конечномерном евклидовом пространстве  $E^4$ , основанный на монотонной зависимости собственных значений от параметров граничных условий и являющийся аналогом метода деления отрезка пополам.

Определен параллелепипед, в котором необходимо найти решения многопараметрической обратной спектральной задачи:

$$[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi} = \{\vec{x} \in R^4 : 1 \leq x_1 \leq 10, -10 \leq x_2 \leq 1, 1 \leq x_3 \leq 10, -10 \leq x_4 \leq 1\}.$$

Пусть точка  $\vec{c} \in [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}$  – центр параллелепипеда. Поскольку у четырехмерного параллелепипеда  $2^4 = 16$  вершины, то можно сформировать 16

подобластей  $[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, 16}$  таких, что:

$$\bigcap_{i=1}^{16} [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}^{(i)} = \vec{c}, \bigcup_{i=1}^{16} [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}^{(i)} = [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}.$$

Далее в каждом параллелепипеде  $[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, 16}$  проверяется выполнения условия  $\vec{\lambda} \notin [\vec{\mu}(\vec{a}), \vec{\mu}(\vec{b})]_{\Pi}^{(i)}$ . Если условие выполняется, то рассматриваемый параллелепипед не содержит решений, если же условие не выполняется, то по вышеописанной схеме выполняем его разбиение и переходим к следующему параллелепипеду.

В пакете MATLAB разработан комплекс программ, реализующих представленный алгоритм численного построения решений многопараметрической обратной спектральной задачи для оператора  $B(\lambda, \vec{p})$  в конечномерном евклидовом пространстве  $E^4$ . В результате его выполнения с точностью до 7 знака для заданного параллелепипеда получены два решения:

$$\begin{aligned} p_1 &= 1.0000000, p_2 = -2.0000000, p_3 = 3.0000000, p_4 = -4.0000000, \\ p_1 &= 3.0000000, p_2 = -4.0000000, p_3 = 1.0000000, p_4 = -2.0000000. \end{aligned}$$

Одно из них совпадает с заданными в (30) параметрами граничных условий.

Таким образом, представлены три метода решения обратной спектральной задачи для краевой задачи для единичного проводника: явный метод решения системы алгебраических уравнений, сведение к системе прямых спектральных задач, алгоритм численного решения, основанный на монотонной зависимости собственных значений от параметров граничных условий.

Далее рассмотрена электрическая цепь в виде соединения типа «звезда», для которой краевая задача имеет вид:

$$a_k^2 y_k''(x_k) + \lambda y_k(x_k), x_k \in (0; l_k), k = \overline{1, 3}, \quad (36)$$

с граничными условиями

$$y_k'(l_k) + (p_{k1} + \lambda p_{k2}) y_k(l_k) = 0, k = \overline{1, 3}, \quad (37)$$

и условиями в общем узле

$$\begin{cases} y_1(0) = y_2(0) = y_3(0), \\ \sum_{i=1}^3 y_i'(0) = 0. \end{cases} \quad (38)$$

Показано, что спектр краевой задачи (36)–(38) является дискретным, вещественным и положительным.

Решением прямой спектральной задачи для краевой задачи (36)–(38) является решение уравнения:

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\frac{\sqrt{\lambda}}{a_k} \sin \frac{\sqrt{\lambda} l_k}{a_k} - (p_{k1} + \lambda p_{k2}) \cos \frac{\sqrt{\lambda} x_k}{a_k}}{a_k \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{a_k} \cos \frac{\sqrt{\lambda} x_k}{a_k} + (p_{k1} + \lambda p_{k2}) \sin \frac{\sqrt{\lambda} l_k}{a_k} \right)} = 0. \quad (39)$$

В пакете MATLAB найдены 6 собственных значений, представляющие собой решения уравнения (39), при заданных значениях параметров, а имен-

но, пусть:

$$\begin{aligned} a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, l_1 = 1, l_2 = 2, l_3 = 3, \\ p_{11} = 1, p_{12} = -2, p_{21} = 3, p_{22} = -4, p_{31} = 5, p_{32} = -6. \end{aligned} \quad (40)$$

Тогда собственные значения имеют вид:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 0.30173, \lambda_2 = 0.69019, \lambda_3 = 0.75950, \\ \lambda_4 = 1.16532, \lambda_5 = 1.99507, \lambda_6 = 3.74285. \end{aligned} \quad (41)$$

Обратная спектральная задача краевой задачи (36)–(38) сведена к многопараметрической обратной спектральной задаче для оператора  $B(\lambda, \vec{p})$  в конечномерном евклидовом пространстве  $E^6$ , которая в свою очередь эквивалентна системе 6 алгебраических уравнений относительно неизвестных  $p_{11}, p_{21}, p_{31}, p_{12}, p_{22}, p_{32}$ :

$$\sum_{k=1}^3 \frac{\frac{\sqrt{\lambda_j}}{a_k} \sin \frac{\sqrt{\lambda_j} l_k}{a_k} - (p_{k1} + \lambda_j p_{k2}) \cos \frac{\sqrt{\lambda_j} l_k}{a_k}}{a_k \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{a_k} \cos \frac{\sqrt{\lambda_j} l_k}{a_k} + (p_{k1} + \lambda_j p_{k2}) \sin \frac{\sqrt{\lambda_j} l_k}{a_k} \right)} = 0, j = \overline{1, 6}. \quad (42)$$

В пакете MATLAB при помощи встроенной функции *solve* невозможно решить систему 6 алгебраических, поэтому зафиксированы 2 из 6 значений вектора параметров граничных условий, например,  $p_{21} = 3, p_{22} = -4$ . При заданных  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_5, \lambda_6$ , значения которых определены в (41), решена система 4 уравнений относительно 4 неизвестных, при этом получены 6 решений, одно из которых совпадает с заданными в (40) параметрами граничных условий.

Представлен алгоритм численного построения решений многопараметрической обратной спектральной задачи для оператора  $B(\lambda, \vec{p})$  в конечномерном евклидовом пространстве  $E^6$ , основанный на монотонной зависимости собственных значений от параметров граничных условий и являющийся аналогом метода деления отрезка пополам.

Определен параллелепипед

$$[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi} = \{ \vec{x} \in R^6 : 1 \leq x_{2k-1} \leq 10, -10 \leq x_{2k} \leq 1, k = \overline{1, 3} \},$$

и точка  $\vec{c} \in [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}$ , которая является его центром. Поскольку у шестимерного параллелепипеда  $2^6 = 64$  вершины, то можно сформировать 64 подобласти  $[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, 64}$  таких, что

$$\bigcap_{i=1}^{64} [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}^{(i)} = \vec{c}, \bigcup_{i=1}^{64} [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}^{(i)} = [\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}.$$

Далее в каждом параллелепипеде  $[\vec{a}, \vec{b}]_{\Pi}^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, 64}$  проверяется выполнение условия  $\vec{\lambda} \notin [\vec{\mu}(\vec{a}), \vec{\mu}(\vec{b})]_{\Pi}^{(i)}$ . Если условие выполняется, то рассматриваемый параллелепипед не содержит решений, если же условие не выполняется, то по вышеописанной схеме выполняется его разбиение и переход к следующему параллелепипеду.

В пакете MATLAB разработан комплекс программ, реализующих представленный алгоритм численного построения решений многопараметриче-



ской обратной спектральной задачи для оператора  $B(\lambda, \vec{p})$  в конечномерном евклидовом пространстве  $E^6$ . В результате его выполнения с точностью до 7 знака для заданного параллелепипеда получены три решения:

$$\begin{aligned} p_{11} &= 1.0000000, p_{12} = -2.0000000, p_{21} = 3.0000000, p_{22} = -4.0000000, \\ & p_{31} = 5.0000000, p_{32} = -6.0000000; \\ p_{11} &= 1.0874127, p_{12} = -2.1623680, p_{21} = 2.4188092, p_{22} = -3.5119061, \\ & p_{31} = 6.3403197, p_{32} = -7.0099062; \\ p_{11} &= 127.0697394, p_{12} = -175.3805220, p_{21} = 4.8907050, p_{22} = -4.0017502, \\ & p_{31} = 1.3165713, p_{32} = -3.2410163; \end{aligned}$$

Одно из них совпадает с заданными в (40) параметрами граничных условий.

**В заключении** сформулированы основные результаты работы:

1. Предложен математический метод моделирования колебательных процессов в электрической сети на геометрическом графе типа «дерево» в виде пучка линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Данный метод отличается от известных тем, что позволяет определить  $m$  неизвестных параметров граничных условий с помощью ровно  $m$  собственных значений.

2. Разработан и обоснован новый численный алгоритм вычисления параметров граничных условий по конечному набору заданных собственных значений, апробированный на аналитических решениях модельных задач.

3. Разработан комплекс программ, позволяющий провести расчет параметров граничных условий по конечному набору заданных собственных значений для единичного проводника и для соединения типа «звезда», которые могут расширены на любой граф типа «дерево». Проведена проверка адекватности результатов вычислительного эксперимента с помощью сравнения результатов с аналитическими решениями.

**В приложении** представлена блок-схема разработанного алгоритма решения обратной спектральной задачи, основанного на монотонной зависимости собственных значений краевой задачи от параметров граничных условий.

## ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### В рецензируемых журналах из перечня ВАК

1. Мартынова, Ю. В. Модельная обратная спектральная задача для оператора Штурма – Лиувилля на геометрическом графе / Ю. В. Мартынова // Вестник Башкирского университета. – 2011. – Т.16. – № 1. – С. 4–10.

2. Мартынова, Ю. В. Модельная обратная спектральная задача для оператора Штурма – Лиувилля на геометрическом графе типа «дерево» / Ю. В. Мартынова // Системы управления и информационные технологии. – 2013. – №3 (53). – С. 19–23.

3. Валеев, Н. Ф. Решение модельной обратной спектральной задачи для оператора Штурма – Лиувилля на графе / Н. Ф. Валеев, Ю. В. Мартынова,

Я. Т. Султанаев // Вычислительные методы и программирование. – 2016. – Т. 17. – С. 204–211.

### **Свидетельство о регистрации электронного ресурса**

4. Мартынова, Ю. В. Численный метод решения обратной спектральной задачи для оператора Штурма – Лиувилля на графе древовидного типа / Ю. В. Мартынова // Хроники объединенного фонда электронных ресурсов «Наука и образование» №08 (87). – 2016. – С.31. – Свидетельство №22107 от 23.08.2016.

### **В других изданиях**

5. Мартынова, Ю. В. Обратная спектральная задача для оператора Штурма – Лиувилля на геометрическом графе типа «дерево» / Ю. В. Мартынова // Тезисы Всероссийской молодежной научно-практической конференции «Актуальные вопросы науки и образования» (25–27 апреля 2013 года, Уфа). – Уфа: РИЦ БашГУ, 2013. – С. 132.

6. Мартынова, Ю. В. Обратная спектральная задача на геометрическом графе типа «дерево» / Ю. В. Мартынова // Тезисы международной научной конференции «Нелинейный анализ и спектральные задачи» (18–22 июня 2013 года, Уфа). – Уфа: РИЦ БашГУ, 2014. – С. 82–83.

7. Мартынова, Ю. В. Решение модельных спектральных задач на геометрическом графе / Ю. В. Мартынова // Тезисы международной научной конференции «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ» (24–26 сентября 2014 года, Уфа). – Уфа: РИЦ БашГУ, 2014. – С. 49–51.

8. Мартынова, Ю. В. Решение спектральных задач для оператора Штурма – Лиувилля на графе типа «дерево» / Ю. В. Мартынова // Сборник научных статей международной научной школы «Парадигма» (20–23 августа 2015 года, Варна, Республика Болгария). – Варна: ЦНИИ «Парадигма», 2015. – Т.1. – С. 100–108.

9. Мартынова, Ю. В. Решение спектральных задач на графе / Ю. В. Мартынова // Тезисы международной научной конференции «Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ» (1–3 октября 2015 года, Уфа). – Уфа: РИЦ БашГУ, 2015. – С. 104–107.

10. Валеев, Н. Ф. Обратная спектральная задачи для оператора Штурма – Лиувилля на графе / Н. Ф. Валеев, Ю. В. Мартынова // Тезисы докладов Международного научного семинара по обратным и некорректно поставленным задачам (19–21 ноября 2015 года, Москва). – Москва: РУДН, 2015. – С. 186–187.

11. Мартынова, Ю. В. Обратная спектральная задачи для оператора Штурма – Лиувилля на графе / Ю. В. Мартынова // Сборник тезисов Уфимской математической конференции с международным участием (27–30 сентября 2016 года, Уфа). – Уфа: РИЦ БашГУ, 2016. – С. 104–106.

Диссертант



МАРТЫНОВА Юлия Валерьевна

ОБРАТНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ  
ГРАФАХ ТИПА «ДЕРЕВО» И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Специальность:

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать 27.01.2017 Формат 60x84 1/16

Бумага офсетная. Печать ризографическая. Тираж 100 экз. Заказ 009.

Гарнитура «TimesNewRoman». Отпечатано в типографии  
«ПЕЧАТНЫЙ ДОМЪ» ИП ВЕРКО.

Объем 1,24 п.л. Уфа, Карла Маркса 12 корп. 5/1,

т/ф: 27-27-600, 27-29-123