На правах рукописи

Утяшев

**Утяшев Ильнур Мирзович**

# Идентификация параметров математических моделей динамики упругих объектов в одномерной постановке

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Уфа — 2016

Работа выполнена на кафедре математического моделирования в ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет»

| | |
|---|---|
| Научный руководитель: | доктор физико-математических наук, профессор<br>**Ахтямов Азамат Мухтарович** |
| Официальные оппоненты: | доктор физико-математических наук, профессор<br>**Маликов Рамиль Фарукович,**<br>ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы»,<br>заведующий кафедрой «Информационных и полиграфических систем и технологий», г. Уфа |
| | кандидат физико-математических наук<br>**Бондаренко Наталья Павловна,**<br>ФГБОУ ВО «Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»,<br>доцент кафедры математической физики и вычислительной математики, г. Саратов |
| Ведущая организация: | Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт механики и машиностроения» Казанского научного центра Российской академии наук, г. Казань |

Защита состоится «26» апреля 2016 г. в 12 часов на заседании диссертационного совета Д-212.288.06 при ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» по адресу: 450000, г. Уфа, Республика Башкортостан, ул. К. Маркса, д. 12.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» и на сайте www.ugatu.su.

Автореферат разослан «14» марта 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д-212.288.06, д.ф.-м.н., проф. Булгакова Г.Т.

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Математические модели физических объектов и процессов позволяет раскрыть суть явлений и предсказать дальнейшее поведение объекта исследования или процесса. В свою очередь, сутью обратных задач является определение причин, которые привели к данному результату. Методы обратных задач широко применяются в дефектоскопии и диагностике. В частности, определение свойств механических систем по собственным частотам колебаний применяется в вибродиагностике. Зная собственные частоты можно не только предсказать параметры закрепления объекта исследования, но и выявить дефекты в его структуре.

Приведенные в диссертационной работе методы моделирования и решения имеют приложения в диагностике закреплений струн, кольцевых мембран, канатов, проводов, тросов и т.д. Предлагаемый автором метод позволяет находить не только параметры закреплений, но и их вид. В частности, метод позволяет определить следующие виды закреплений: свободный край, упругое, жесткое закрепление и всевозможные комбинации этих закреплений. Также предложен метод нахождения параметра растягивающей силы в случае, когда струна колеблется под действием переменной силы натяжения. Результаты исследования обратной задачи динамики струны с переменным натяжением имеют приложения в исследовании динамики всевозможных растяжек, канатов, тросов, строп, шлангов и т.д. Кроме того, в диссертации рассмотрена задача о разрушении трубопровода. Предложена простейшая модель, основанная на моделировании трубопровода стрежнем, по свободному концу которого ударяют грузом. Получены соотношения позволяющие определить параметры удара, такие как длина стрежня, момент удара, масса ударяющего груза и его скорость. Для раннего диагностирования повреждений трубопроводов предложена схема использования систем глобального позиционирования и тензодатчиков, встроенных в трубопровод изначально.

**Целью** данной работы является идентификация видов краевых условий и переменного натяжения струн методами численного моделирования, а также определение этими методами времени удара по стержню, длины стержня, массы ударяющего груза и его скорости.

Для достижения поставленной цели в диссертационной работе сформулированы следующие **задачи**:

1. Математическое моделирование идентификации видов краевых условий и переменного натяжения струн, а также определение времени удара по стержню, длины стержня, массы ударяющего груза и его скорости с помощью краевых задач с дифференциальными уравнениями второго порядка *(п.1 паспорта специальности 05.13.18)*.

2. Развитие численных методов решения задач идентификации видов краевых условий и переменного натяжения струн, а также идентификации времени удара по стержню, длины стержня, массы ударяющего груза и его скорости *(п.4 паспорта специальности 05.13.18)*.
3. Создание комплекса программ для решения этих задач идентификации *(п.8 паспорта специальности 05.13.18)*.

**Методы исследования.** Предложены новые методы идентификации видов краевых условий, основанные на соотношениях Плюккера, методы исследования переменного натяжения струн, а также методы определения времени удара по стержню, длины стержня, массы ударяющего груза и его скорости.

Использованы методы спектральной теории дифференциальных уравнений, методы теории обратных и некорректных задач, асимптотические формулы бесселевых функций, многокомпонентный анализ для исследования сходимости. Для реализации построенных численно-аналитических алгоритмов использовалась среда программирования Lazarus и математический пакет Maple.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Метод моделирования граничных условий для задачи идентификации вида и параметров закрепления механических систем, основанный на представлении коэффициентов граничных условий в виде матрицы, определяемой с точностью до линейных преобразований строк.
2. Аналитический метод, позволяющий идентифицировать вид и параметры закреплений струн и кольцевых мембран по собственным частотам колебаний с использованием условий Плюккера.
3. Для задачи о колебании струны с переменным натяжением предложен новый метод идентификации закона изменения растягивающей силы по изменению амплитуды или длины волн.
4. Предложена простейшая математическая модель разрушения трубопровода (под водой), и на основе этой модели решена задача приближенного определения места, времени прорыва, а также его масштабов по показаниям тензодатчика, изначально встроенного в трубопровод. (В этой модели трубопровод моделируется стержнем, по торцу которого совершен удар. Колебания трубопровода моделируются продольными колебаниями стержня, место прорыва моделируется длиной стержня. «Масштабы разрушения» определяются массой и скоростью «груза», которым нанесен удар).
5. Комплекс программ для решения изучаемых задач идентификации.

**Научная новизна:**

1. Предложена математическая модель краевых условий в виде матрицы, определяемой с точностью до линейных преобразований строк. На основе предложенной модели решена задача идентификации закреплений струн

(с точностью до перестановок местами ее концов) и кольцевых мембран по двум (трем) собственным частотам колебаний, которая отличается от ранее решенных задач тем, что определяются не только параметры, но и вид краевых условий. Кроме того, впервые условие Плюккера используется непосредственно для нахождения самого решения, а не для доказательства корректности. Разработана программа для численных расчетов. Методами фильтрации численных результатов показана устойчивость и сходимость метода.

2. Решена задача идентификации краевых условий струны по двум собственным значениям. Найдены решения в случае, когда в задаче Штурма-Лиувилля потенциал $q(x) = 0$ и в случае, когда $q(x) \neq 0$ и симметричен. Показано, что если потенциал $q(x)$ симметричен ($q(1-x) = q(x)$), то метод решения задачи идентификации совпадает с методом решения без потенциала.
3. Предложена математическая модель колебания струны с переменным натяжением при больших временах. Получено решение задачи идентификации переменной силы натяжения по амплитудам колебания струны, которая ранее не была решена.
4. Предложена простейшая математическая модель разрушения трубопровода (под водой), и на основе этой модели впервые решена задача приближенного определения места, времени прорыва, а также его масштабов по показаниям тензодатчика, изначально встроенного в трубопровод. (В этой модели трубопровод моделируется стержнем, по торцу которого совершен удар. Колебания трубопровода моделируются продольными колебаниями стержня, место прорыва моделируется длиной стержня. «Масштабы разрушения» определяются массой и скоростью «груза», которым нанесен удар).
5. На основе предложенных моделей реализованы эффективные численные методы решения соответствующих задач идентификации, а также составлены соответствующие комплексы программ. Доказана сходимость полученных решений методами многокомпонентного анализа. Фильтрация численных результатов экстраполяционной формулой Ричардсона показала хорошую сходимость решений.

**Практическая и теоретическая значимость** диссертационный работы. Решение задачи идентификации закреплений механических систем по собственным частотам колебаний имеет приложения в вибродиагностике. Применение предложенного метода дает возможность диагностирования недоступных для визуального осмотра закреплений струн, мембран, и т.д. Особенность решения заключается в том, что для идентификации используется не весь спектр собственных частот, а лишь его часть. Также полученные результаты имеют приложения в виброзащите для ухода от резонансных частот. Решение обратной задачи о колебании струны с переменным натяжением имеет многочисленные применения, например, в изучении динамики всевозможных растяжек, тросов, канатов, строп, шлангов и т. д. Предложенная простейшая модель разрушения трубопровода может быть применима для раннего диагностирования прорыва трубопровода, проложенного под водой. Данная задача становиться особенно актуальной, когда труба проложена на большой глубине, и кроме этого присутствуют подводные течения, затрудняющие поиск места прорыва и его масштабы.

**Достоверность** изложенных в работе результатов обеспечивается строгостью их аналитических доказательств. Численные алгоритмы апробированы на известных решениях других авторов.

**Апробация** диссертационной работы.

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic Countries (Almaty: al-Farabi Kazakh National University, 2009), международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых "Фундаментальная математика и её приложения в естествознании"(г.Уфа, БашГУ, 2009, 2010, 2012, 2014), всероссийская научно-практическая конференция "Прикладная информатика и компьютерное моделирование"(г. Уфа, БГПУ им. М. Акмуллы, 2012), международная научно-практическая конференция с элементами научной школы для молодых ученых "48-е Евсевьевские чтения посвященная 50-летию института «Математика. Физика. Информатика» (г. Саранск, Мордов. гос. пед. ин-т., 2012), V Российская конференция с международным участием «Многофазные системы: теория и приложение», посвященной 20-летию со дня основания Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН (г. Уфа, 2012), международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы"(г. Стерлитамак, 2013), всероссийская молодежная научно-практическая конференция "Актуальные вопросы науки и образования"(г. Уфа, 2013), II всероссийская научно-практическая конференция с международным участием "Математическое моделирование процессов и систем"(г. Стерлитамак, 2013), всероссийская научная конференция "Инновационный потенциал молодежной науки"(г.Уфа, 2013), международная конференция «Спектральная теория и дифференциальные уравнения», посвящённая 100-летию Б. М. Левитана (г.Москва, 2014), II международная научно-практическая конференция «Современные проблемы науки и образования в техническом вузе» (г. Стерлитамак,2015 г.), XI всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015 г.).

Диссертационная работа была выполнена при поддержке грантов № 14-01-00740-а (РФФИ) «Взаимодействие упругой и гидродинамической неустойчивостей», 2014 г.; № 14-01-97013-р_поволжье_а (РФФИ) «Динамические модели

стержней, балок, валов с локальными повреждениями: прямые и обратные задачи», 2014 г.; № 14-01-97010-р_поволжье_а (РФФИ) «Обратные спектральные задачи и акустическая диагностика механических систем и неоднородных сред», 2014 г.

**Личный вклад.** В совместных публикациях А.М. Ахтямову принадлежит постановка задач, а И.М. Утяшеву – построение математических моделей; разработка аналитических и численных методов решения поставленных задач, а также создание комплексов программ.

**Публикации.** Основные результаты опубликованы в работах [1] – [23], 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 2 — зарегистрированные программные продукты, 17 — материалы конференций.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объем диссертации **107** страниц текста с **31** рисунками и 6 таблицами. Список литературы содержит **104** наименования.

## Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы, излагается описание диссертации по главам.

**Первая глава** посвящена обзору научной литературы по изучаемой проблеме. Здесь также затрагиваются некоторые вопросы математического моделирования, вводятся понятия о прямых и обратных задачах.

**Вторая глава** посвящена задачам идентификации видов и параметров граничных условий по собственным частотам колебаний.

Рассматриваются поперечные колебания струны, описываемые уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u, \tag{1}$$

с краевыми условиями на левом и правом концах:

$$b_{11}u_x(0,t) - b_{12}u(0,t) = 0, \tag{2}$$

$$b_{23}u_x(l,t) + b_{24}u(l,t) = 0, \tag{3}$$

где $q(x) \in \mathbf{C}^\infty[0,l]$, $x, q(x) \in \mathbf{R}$ , а коэффициенты $b_{ij}$ – неотрицательны. В зависимости от значений коэффициентов $b_{11}$, $b_{12}$, $b_{23}, b_{24}$ можно получить жесткое, упругое или свободное закрепление на каждом из концов струны.

**Прямой задачей** будем называть задачу определения собственных частот колебаний струны, если известен вид краевого условия и параметры $b_{11}$,

$b_{12}, b_{23}, b_{24}$. А под **обратной задачей** будем понимать задачу идентификации вида краевых условий и параметров $b_{11}$, $b_{12}$, $b_{23}, b_{24}$ по известным собственным частотам.

Разработан модифицированный метод миноров, для применения которого прямая и обратная задача сформулированы в терминах задачи Штурма-Лиувилля и характеристического определителя.

После замены $u(x,t) = y(x)\cos\omega t$, из (1) имеем $-\omega^2 y(x)\cos\omega t = a^2 y''(x)\cos\omega t - q(x)y(x)\cos\omega t$. Отсюда после введения новых обозначений $\xi = x/l$ и $\lambda^2 = \frac{\omega^2 l^2}{a^2}$ получаем прямую задачу в терминах задачи Штурма-Лиувилля:

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \tag{4}$$

$$U_1(y) = a_{11}y'(0) - a_{12}y(0) = 0, \tag{5}$$

$$U_2(y) = a_{23}y'(1) + a_{24}y(1) = 0, \tag{6}$$

где $a_{11} = b_{11}/l$, $a_{12=}b_{12}$, $a_{23} = b_{23}/l$, $a_{24} = b_{24}$.

Матрица (матрица краевых условий), состоящая из коэффициентов краевых условий $a_{ij}$ форм $U_1(y)$, $U_2(y)$, обозначена через $A$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Решение прямой задачи представляется в виде характеристического определителя, нулями которого являются собственные значения задачи (5) – (6):

$$\Delta(\lambda) = J_{13}f_{13}(\lambda) + J_{14}f_{14}(\lambda) + J_{23}f_{23}(\lambda) + J_{24}f_{24}(\lambda) = 0, \tag{8}$$

где через $J_{ij} = \det\begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{pmatrix}$ обозначен определитель, составленный из $i$-го и $j$-го столбцов матрицы краевых условий $A$. При $q(x) = 0$, коэффициенты $f_{ij}$ равны $f_{13} = \lambda\sin\lambda$, $f_{14} = f_{23} = -\cos\lambda$, $f_{24} = -\frac{\sin\lambda}{\lambda}$, а в случае когда потенциал $q(x) \neq 0$ коэффициенты $f_{ij}$ вычисляются по формулам:

$$f_{13} = y_1'(0)y_2'(1) - y_2'(0)y_1'(1), \quad f_{14} = y_1'(0)y_2(1) - y_2'(0)y_1(1),$$

$$f_{23} = y_2(0)y_1'(1) - y_1(0)y_2'(1), \quad f_{24} = y_2(0)y_1(1) - y_1(0)y_2(1),$$

где $y_1$, $y_2$ – фундаментальная система решений уравнения (4). Причем, $y_1$, $y_2$ являются целыми функциями по $\lambda$ при каждом фиксированном $x$.

Следует отметить, что в случае когда потенциал $q(x)$ симметричен, метод решения задачи идентификации не отличается от метода решения без потенциала. Отличие заключается только в виде линейно независимых решений. Для случая $q(x) \neq 0$ линейно независимые решения представляются в виде ряда

Тейлора по $x$ и $\lambda$, а для случая $q(x) = 0$ в виде синусов и косинусов (см. выше). Далее будем рассматривать только симметричный случай $q(1-x) = q(x)$.

**Обратную задачу** - задачу идентификации краевых условий по собственным частотам - в терминах функции (8) можно сформулировать следующим образом: *коэффициенты $a_{ij}$ матрицы $A$ неизвестны; ранг матрицы $A$ равен двум; известны корни $\lambda_k$ характеристического определителя (8). Требуется идентифицировать матрицу $A$ с точностью до линейных преобразований строк.*

Показано, что матрицу краевых условий можно представить с помощью ее миноров. В частности при условии, что $J_{13} \neq 0$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & J_{23}/J_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{13} & J_{14} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Таким образом, если для матрицы краевых условий $A$ найти ее определители $J_{13}$, $J_{14}$, $J_{23}$, $J_{24}$, то легко находится сама матрица, а значит и краевые условия.

**Теорема 1 (соотношение Плюккера).** *Для того чтобы набор чисел $J_{13}$, $J_{14}$, $J_{23}$, $J_{24}$ являлся набором определителей второго порядка некоторой матрицы размера 2x4 и ранга 2 необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение $J_{13}J_{24} - J_{23}J_{14} = 0$, называемое соотношением Плюккера.*

**Теорема 2 (о двойственности решения).** *Пусть $\lambda_1, \lambda_2$ являются собственными значениями задачи (4)-(6), ранг матрицы $F$ равен 2. Тогда задача идентификации краевых условий имеет два решения, которые представляются в явном виде в терминах определителей $F_{ij}$, где*

$$F = \begin{pmatrix} f_{13}(\lambda_1) & f_{14}(\lambda_1) & f_{24}(\lambda_1) \\ f_{13}(\lambda_2) & f_{14}(\lambda_2) & f_{24}(\lambda_2) \end{pmatrix}, \tag{10}$$

*а $F_{ij}$ – определитель, получаемый из $F$ вычеркиванием столбца с элементом $f_{ij}(\lambda_k)$.*

Далее показывается, что миноры матрицы $A$ определяются двойственным образом в следующем явном виде:

$$\begin{gathered} J_{13} = F_{13}t, \quad J_{14} = \frac{t}{2}\left(-F_{14} \mp \sqrt{F_{14}^2 - 4F_{13}F_{24}}\right), \\ J_{23} = \frac{t}{2}\left(-F_{14} \pm \sqrt{F_{14}^2 - 4F_{13}F_{24}}\right), \quad J_{24} = F_{24}t, \end{gathered} \tag{11}$$

где $t \neq 0$ произвольное число. Подставив эти решения в (9) получим две матрицы $\tilde{A}$. Методами фильтрации численных результатов продемонстрирована хорошая сходимость метода при точности входных данных порядка $10^{-6}$.

Приведены соответствующие примеры и контрпример, показывающий существенность условия теоремы ($\mathrm{rank}F = 2$).

Показана применимость данного метода к задаче идентификации граничных условий для кольцевой мембраны.

Для решения задач идентификации разработаны программы на языке Maple. Для удобства пользователя все вычисления проводятся с помощью процедур, результаты выводятся в конце всех процедур в виде списка, в коде программы приведены описания алгоритмов.

**Третья глава** посвящена задаче идентификации параметра силы натяжения по изменению амплитуды или длин волн.

В зависимости от заданного закона изменения по времени силы натяжения изучаются режимы поперечных колебаний струны. Один конец ее неподвижно закреплен, на другом приложена указанная сила.

Уравнение поперечного движения струны имеет вид

$$\rho F\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < L, \tag{12}$$

где $x$, $t$, $w$– координата вдоль струны, время, отклонение от прямой линии, $\rho$, $F$, $L$ – плотность, площадь поперечного сечения и длина струны. Сила натяжения $N$ принимается в виде

$$N = N_0(t/t_0)^\alpha, \quad (\alpha > -1) \tag{13}$$

где $t_0$ – время, когда сила $N$ достигает значение $N_0$.

Вводя обозначения $\xi = x/L$, $\tau = t/t_0$, $u = w/L$, $t_0 = L\sqrt{\rho F/N_0}$, из (12), (13) получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \tau^\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0, \quad 0 < \xi < 1. \tag{14}$$

Граничные и начальные условия

$$u(0,\tau) = 0, \qquad u(1,\tau) = 0, \tag{15}$$

$$u(\xi,0) = \varphi(\xi), \qquad \frac{\partial u}{\partial \tau}(\xi,0) = \psi(\xi). \tag{16}$$

Решение задачи (14) – (16) известно и представляется в виде:

$$u(\xi,\tau) = \sqrt{\tau}\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k J_{-p}\left(2pk\pi\tau^{1/2p}\right) + B_k J_p\left(2pk\pi\tau^{1/2p}\right)\right] sin(k\pi\xi), \tag{17}$$

$$A_k = 2\Gamma(1-p)(k\pi p)^p\int_0^1 \varphi(\xi) sin(k\pi\xi)d\xi,$$

$$B_k = 2\Gamma(1+p)(k\pi p)^{-p}\int_0^1 \psi(\xi) sin(k\pi\xi)d\xi, \quad p = \frac{1}{2+\alpha},$$

где Γ– Гамма-функция.

Проведен анализ формулы (17), показано поведение решения при различных параметрах растягивающей силы $\alpha$ и при различных начальных профилях струны.

На основе приведенного анализа поставлена **обратная задача**: *определить параметр $\alpha$ по известным значениям амплитуд и длин волн.*

Для решения поставленной задачи Бесселевы функции были заменены на асимптотические формулы при больших аргументах. После подстановки в решение (17), с допущением того, что начальная скорость считается нулевой $\psi(\xi) = 0$, решение (17) для удаленного времени после начала действия силы приводится к виду:

$$u(\xi,\tau) = \frac{\sqrt{\tau}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k\left(\frac{\tau^{-\frac{1}{2p}}}{pk}\right)^{\frac{1}{2}} cos\left(2p\pi k\tau^{\frac{1}{2p}} + \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] sin(k\pi\xi). \qquad (18)$$

Далее приводится вывод уравнения для расчета параметра растягивающей силы $\alpha$ по колебаниям в некоторой точке $\xi_0$ на струне. Показано, что если известны некоторые точки $\tau_1$ и $\tau_2$ локального максимума функции $u(\xi_0,\tau)$ и значения $u_{max_1}$ и $u_{max_2}$ функции $u(\xi_0,\tau)$ в этих точках, то формула для нахождения $\alpha$ представляется в виде:

$$\alpha = -\frac{4\left(\ln u_{max1} - \ln u_{max2}\right)}{\ln\tau_1 - \ln\tau_2}. \qquad (19)$$

Аналогично выведены формулы для нахождения $\alpha$ по корням функции (18) в некоторой точке $\xi_0$.

$$\alpha = -\frac{2\left(\ln T_1 - \ln T_2\right)}{\ln\eta_1 - \ln\eta_2}. \qquad (20)$$

Здесь $\tau = \eta_i$ $(i = 1, 2)$ – некоторый корень функции $u(\xi_0,\tau)$ (Рис.1), а $T_i$ – длина интервала $(a_i, b_i)$, где $a_i$, $b_i$ – ближайшие к $\eta_i$ корни функции $u(\xi_0,\tau)$.

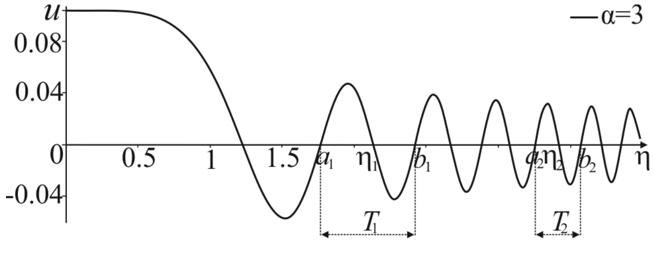


Рис. 1: Периоды функции в точке $\xi = 0.5$

Приведены примеры решения задач при различных параметрах $\alpha$ и начальных профилях струны. Проведена оценка сходимости метода.

**Четвертая глава** посвящена обратной задаче о продольном ударе по стержню. Более точно, рассматривается цилиндрический стержень, оба конца которого свободны (см. рис. 2, а).

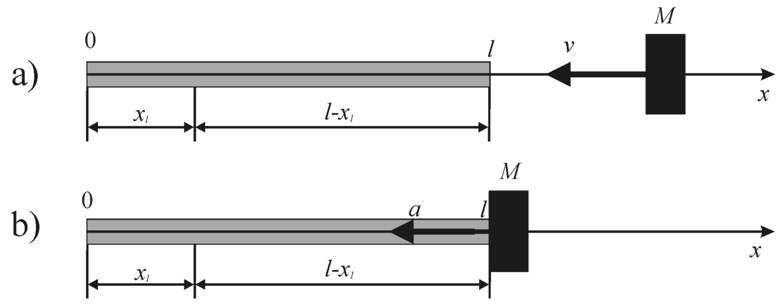


Рис. 2: Схема удара груза массой  по стержню в момент времени $t_0$:
a – состояние до удара; b – после удара.

В какой-то момент времени $t_*$ свободный конец подвергается удару груза массы $M$, движущегося вдоль оси со скоростью $v$. Решается задача определения момента времени $t_0$ удара, длины стержня $l$, массы груза  и скорости $v$ по данным датчика, который снимает значения деформации $(\partial u/\partial x)$ сечения стержня с абсциссой $x_1$ в различные моменты времени $t$ (см. рис. 2,b). Модуль упругости стержня , площадь его поперечного сечения $F$ и объемная плотность $\rho$ считаются известными.

Метод решения основан на том факте, что при соударении груза и стрежня, вдоль стержня возникают продольные волны, которые распространяясь по стержню многократно отражаются от его концов. Изучая падающие и отраженные волны были получены формулы для расчета длины стержня $l$, момента удара $t_*$, массы ударяющего груза $m$ и его скорости $v$:

$$l = x_1 + a(t_3 - t_2)/2, \quad t_* = t_1 - (l - x_1)/a,$$

$$m = \frac{0.25x_1}{l \cdot \ln \frac{\left.\frac{\partial u(x,t_1^*)}{\partial x}\right|_{x=x_1}}{\left.\frac{\partial u(x,t_2^*)}{\partial x}\right|_{x=x_1}}}, \quad v = -a \left.\frac{\partial u(x,t_1^*)}{\partial x}\right|_{x=x_1} e^{\frac{0.25x_1}{ml}},$$

где $t_1^* = \frac{4l-3x_1}{4a} + t_*$, $t_2^* = \frac{2l-x_1}{2a} + t_*$ .

Приведены способы приложения полученных формул расчета.

В конце главы представлено описание программного комплекса для решения задачи о продольном ударе по стержню, приведены скриншоты. Разработка проводилась в Lazarus - интегрированной среде разработки ПО для Microsoft Windows на языке Object Pascal. Программный продукт решает как прямую, так и обратную задачи. Результат прямой задачи выводиться либо в виде графика, либо в виде списка, по выбору пользователя. Результат решения обратной задачи выводиться в виде списка.

В **заключении** приведены следующие основные результаты:

1. Решена задача идентификации краевых условий струны по двум собственным частотам. Доказано, что решение находятся с точностью до переста-

новок закреплений местами. Полученное решение отличается от ранее решенных задач тем, что идентифицируются не только параметры, но и вид краевых условий. Кроме того, впервые условие Плюккера используется непосредственно для нахождения самого решения, а не для доказательства корректности. Показана применимость данного метода для решения задачи идентификации краевых условий на обоих контурах кольцевой мембраны. Для кольцевой мембраны, решение находиться однозначно по трем собственным значениям.

2. Решена задача идентификации краевых условий струны по двум собственным значениям, в случае, когда в задаче Штурма-Лиувилля потенциал $q(x) \neq 0$ и симметричен. Показано, что если потенциал симметричен ($q(1-x) = q(x)$), то метод решения задачи идентификации не отличается от метода решения задачи без потенциала. В этом случае также получаем два решения - краевые условия находятся с точностью до перестановок закреплений местами.

3. Получено решение обратной задачи о колебании струны с переменным натяжением. Показано, что для определения закона изменения натяжения достаточно знать два значения амплитуды и их моменты или два значения длин волн.

4. Предложена простейшая математическая модель разрушения трубопровода (под водой), и на основе этой модели впервые решена задача приближенного определения места, времени прорыва, а также его масштабов по показаниям тензодатчика, изначально встроенного в трубопровод. (В этой модели трубопровод моделируется стержнем, по торцу которого совершен удар. Колебания трубопровода моделируются продольными колебаниями стержня, место прорыва моделируется длиной стержня. «Масштабы разрушения» определяются массой и скоростью груза, которым нанесен удар).

5. Разработаны численные методы решения соответствующих задач идентификации. Проведены исследования сходимости полученных решений методами многокомпонентного анализа. Фильтрация численных результатов экстраполяционной формулой Ричардсона показала хорошую сходимость решений.

6. Решены обратные задачи всех пяти типов, описанные в книге А. О. Ватульяна: *граничная* обратная задача (задача идентификации краевых условий по двум собственным значениям), *коэффициентная* (задача о колебании струны с переменным натяжением), *ретроспективная* (задача о поиске момента удара по струне), *геометрическая* (поиск длины стрежня по которому совершается удар), обратная задача *смешанного* типа (задача об ударе по стержню).

7. Созданы программы для численного решения рассматриваемых в диссертации прямых и обратных задач.

## ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### В рецензируемых журналах из списка ВАК


1. *Ахтямов А.М., Утяшев И.М.* Ретроспективная задача распространения поперечных волн // Контроль. Диагностика, 2010. № 4. С. 36–38
2. *Утяшев И.М., Ахтямов А.М.* Определение места повреждения участка трубопровода с помощью его продольных колебаний // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности, 2012. № 6. С. 36–39
3. *Утяшев И.М.* Анализ поперечных колебаний струны в зависимости от изменяющегося натяжения // Вестник Башкирского университета, 2013. Т. 18. № 4. С. 973–977
4. *Утяшев И.М., Ахтямов А.М.* Идентификация краевых условий на обоих концах струны по собственным частотам колебаний // Акустический журнал, 2015. Т. 61. № 6. С. 647–655.


### Зарегистрированные программные продукты


5. *Утяшев И.М., Ахтямов А.М.* Программа поиска вида и параметров закрепления кольцевой мембраны // Хроники объединенного фонда электронных ресурсов Наука и образование, 2014. № 3 (58). С. 5. URL: http://ofernio.ru/portal/newspaper/ofernio/2014/3.doc. (дата обращения: 07.04.2014).
6. *Утяшев И.М., Ахтямов А.М.* Программа для решения прямой и обратной задачи о продольном ударе по стержню // Хроники объединенного фонда электронных ресурсов Наука и образование, 2014. № 11 (66). С. 15-16. URL: http://ofernio.ru/portal/newspaper/ofernio/2014/11.doc. (дата обращения: 05.11.2014).


### В других изданиях


7. *Utyashev I.M.* Retrospective problem of distribution of cross-section waves: Abstracts of the Third Congress of the World Mathematical Society of Turkic Countries, Volume 1 (June 30 July 4, 2009) / Edited by Academician Bakhytzhan T. Zhumagulov. – Almaty: al-Farabi Kazakh National University, 2009. p. 303
8. *Ахтямов А.М., Утяшев И.М.* Ретроспективная задача распространения поперечных волн // Фундаментальная математика и её приложения в естествознании, Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых, тезисы докладов, 2009. С. 35.
9. *Утяшев И.М.* Ретроспективная задача распространения поперечных волн // Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и её приложения в естествознании». Математика. Том 1. Уфа: РИЦ БашГУ, 2009. С. 438-443.

10. *Ахтямов А.М., Утяшев И.М.* Обратная задача распространения поперечных волн // Фундаментальная математика и её приложения в естествознании, Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых, тезисы докладов, 2010. С. 15
11. *Утяшев И.М.* Обратные задачи определения параметров удара по стержню, в случае затухающих волн // Материалы Всероссийской научно-практической конференции "Прикладная информатика и компьютерное моделирование"г. Уфа, 25-28 мая 2012 г. Том 4. Уфа: БГПУ им. М. Акмуллы, 2012. С. 46-47.
12. *Ахтямов А.М., Утяшев И.М.* Метод подбора для идентификации краевых условий по собственным частотам колебаний в случае упругого закрепления // Материалы международной научно-практической конференции с элементами научной школы для молодых ученых – 48-е Евсевьевские чтения , посвященная 50-летию института «Математика. Физика. Информатика», 23-25 мая 2012 г.: [материалы] / редкол.: С.М. Мумряева (отв. ред.) [и др.]; Мордов. гос. пед. ин-т. – Саранск, 2012. С. 42-47.
13. *Утяшев И.М., Ахтямов А.М.* Идентификация повреждения трубопровода с использованием тензодатчиков // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. Вып. 9./ Материалы V Российской конференции с международным участием «Многофазные системы: теория и приложение», посвященной 20-летию со дня основания Института механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН (Уфа, 2-5 июля 2012). Часть II. - Уфа: Нефтегазовое дело, 2012. С. 130-133.
14. *Утяшев И.М.* Метод подбора для идентификации закрепления кольцевой мембраны// Фундаментальная математика и её приложения в естествознании, Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых, тезисы докладов, 2012. С. 242
15. *Утяшев И.М.* Обратная задача по определению закона изменения растягивающей силы для поперечных колебаний струны // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: Труды международной научной конференции: В 2 т. (26-30 июня 2013 г., г. Стерлитамак) / Отв. ред. К.Б. Сабитов. Уфа: РИЦ БашГУ, 2013. Т.II. С. 68-73.
16. *Утяшев И.М., Ахтямов А.М.* Анализ поперечных колебаний струны в зависимости от изменяющегося натяжения // Актуальные вопросы науки и образования: тезисы Всероссийской молодежной научно-практической конференции (25-27 апреля 2013 г., г. Уфа) / отв. ред. В.Ю. Гуськов. Уфа: РИЦ БашГУ, 2013. С. 162
17. *Утяшев И.М.* Обратная задача определения параметра растягивающей силы // Математическое моделирование процессов и систем: Сборник трудов II

Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. уч. (28-29 ноября 2013 г., г. Стерлитамак) / под общ. ред. С.А. Мустафиной. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2013. С. 101–102.

18. *Утяшев И.М.* Определение параметра растягивающей силы по известным значениям периодов и амплитуд // Инновационный потенциал молодежной науки: материалы Всероссийской научной конференции 8 ноября 2013 г. / под ред. А.Ф. Мустаева. Уфа: Изд-во БГПУ, 2013. С. 134–136.
19. *Утяшев И.М.* Метод подбора для задачи определения параметров закрепления однородной струны // Международная конференция «Спектральная теория и дифференциальные уравнения», посвящённая 100-летию Б. М. Левитана: Тезисы докладов. М.: Изд-во МГУ и ООО «ИНТУИТ.РУ», 2014. С. 133-134.
20. *Утяшев И.М.* Прямая и обратная задача о продольном ударе по стержню // Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании: тезисы докладов VII Международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых /отв. ред. Б.Н. Хабибуллин, Е.Г. Екомасов. - Уфа: РИЦ БашГУ, 2014. С. 330.
21. *Утяшев И.М.* Идентификация краевых условий струны по двум собственным частотам колебаний // материалы II Международной научно-практической конференции «Современные проблемы науки и образования в техническом вузе» (25-27 июня 2015 года, г. Стерлитамак). Ч. 1. Уфа: Уфимск. гос. Авиац. техн. ун-т, 2015. С. 63–67.
22. *Утяшев И.М., Ахтямов А.М.* Идентификация краевых условий струны по двум собственным частотам колебаний // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. (Казань. 20–24 августа 2015 г.). Казань.: Издательство Академии наук РТ, 2015. С. 3867–3869.
23. *Утяшев И.М., Ахтямов А.М.* Идентификация краевых условий струны по двум собственным частотам колебаний // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. (Казань. 20–24 августа 2015 г.). Казань.: Издательство Академии наук РТ, 2015. С. 285.