

**Белогрудов Александр Николаевич**

**УГАТУ**

**доцент кафедры специальных глав математики**

**Стереометрия.**

**Часть 1.**

**2017г.**

### **Типы рассматриваемых задач:**

- взаимное расположение элементов фигур в пространстве;
- расчетные задачи по вычислению углов.

### **Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве**

#### Прямые в пространстве:

- параллельны,
- пересекаются,
- скрещиваются.

#### Плоскости в пространстве:

- параллельны,
- пересекаются.

#### Прямая и плоскость в пространстве:

- параллельны (и не имеют общих точек),
- прямая пересекает плоскость (одна общая точка),
- прямая принадлежит плоскости.

### **Измерение углов:**

**Угол между скрещивающимися прямыми** Угол между скрещивающимися прямыми измеряется как угол между одной из прямых и пересекающейся с ней прямой, параллельной второй из скрещивающихся.

**Угол между прямой и плоскостью** Угол между прямой и плоскостью измеряется как угол между самой прямой (как наклонной к плоскости) и проекцией её на эту плоскость.

**Угол между плоскостями** Угол между плоскостями измеряется линейным углом между прямыми, лежащими в этих плоскостях и перпендикулярными их общей линии пересечения.

## Задачи на измерение углов.

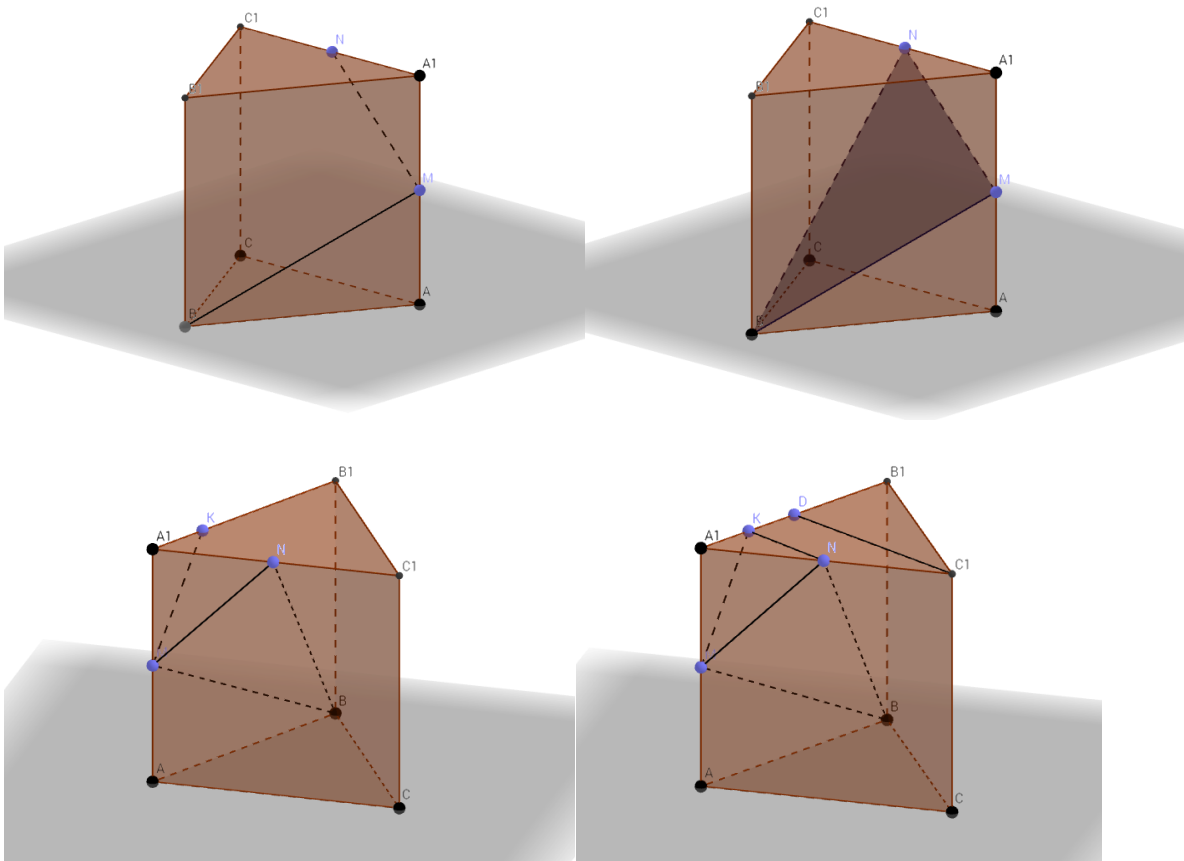
### Пример 1 (демовариант ЕГЭ-2017).

Все рёбра правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  имеют длину 6. Точки  $M$  и  $N$  – середины рёбер  $AA_1$  и  $A_1C_1$  соответственно.

а) Докажите, что прямые  $BM$  и  $MN$  перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями  $BMN$  и  $ABB_1$ . (Ответ:  $\arcsin(\sqrt{5/8})$ )

Рисунок с доп. построением:

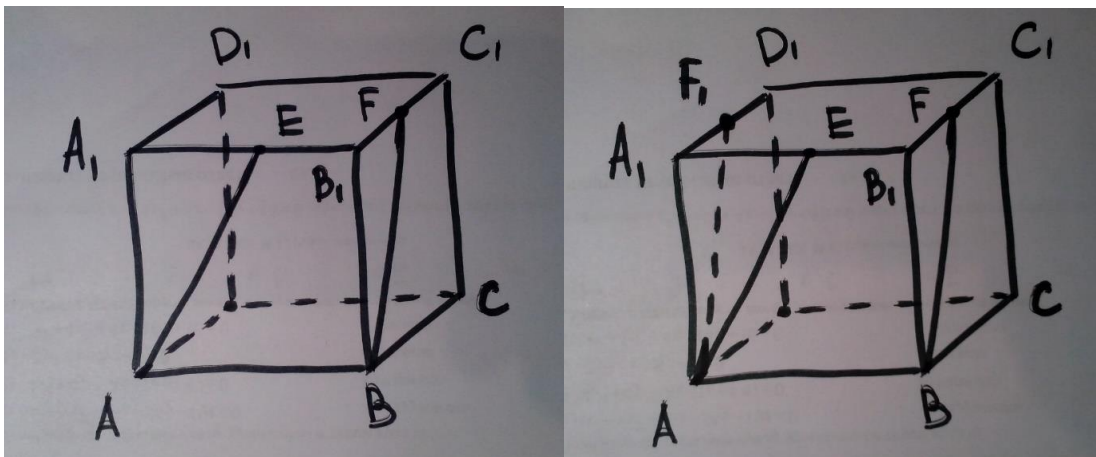


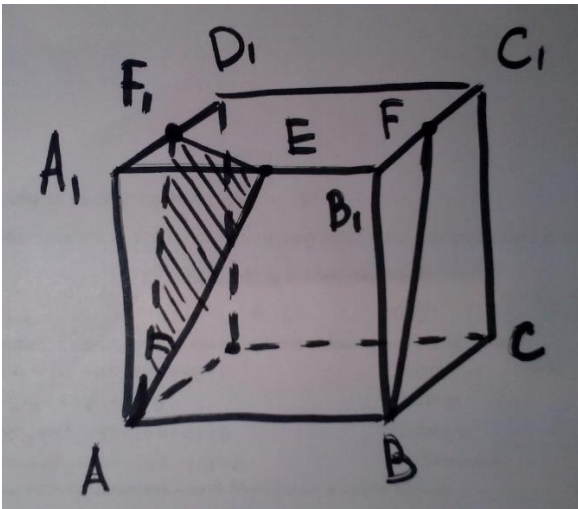
### Пример 2.

Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точка  $E$  – середина  $A_1 B_1$ , точка  $F$  – середина  $B_1 C_1$ .

Найдите косинус угла между прямыми  $AE$  и  $BF$ . (Ответ:  $4/5$ )

Рисунок с доп. построением:

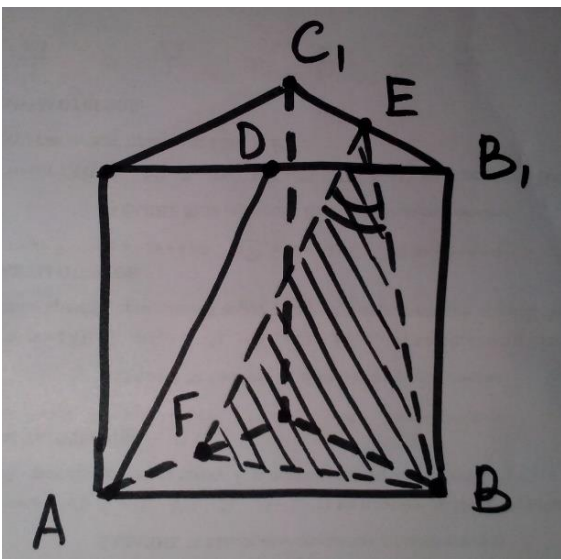
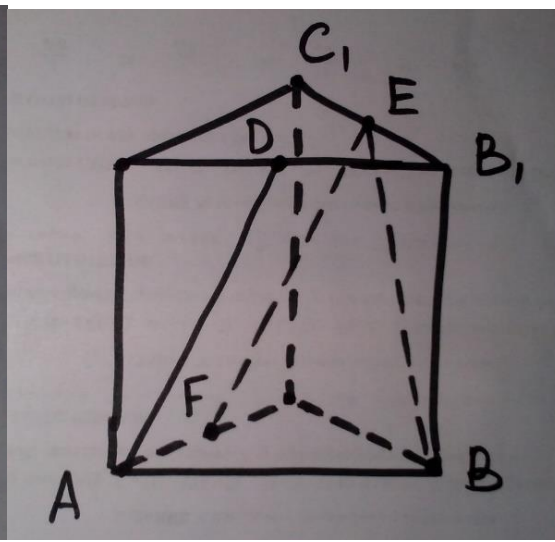
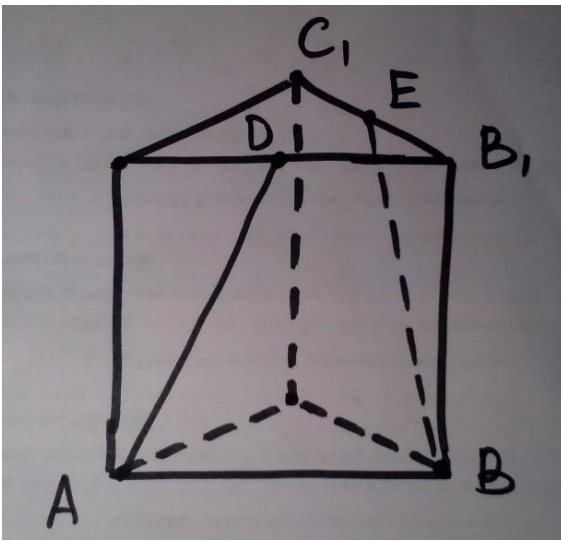




**Пример 3.**

$ABCA_1B_1C_1$  – правильная призма, все ребра которой равны 1. Точки  $D$  и  $E$  – середины ребер  $A_1B_1$  и  $B_1C_1$  соответственно. Найдите косинус угла между прямыми  $AD$  и  $BE$ . (Ответ:  $7/10$ )

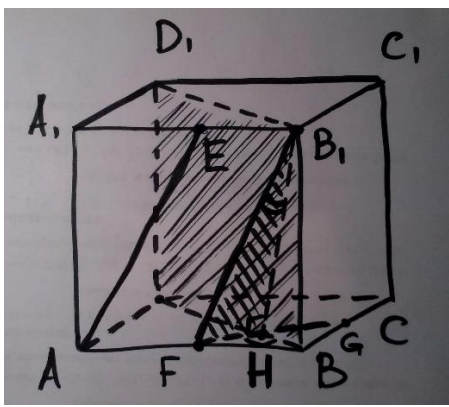
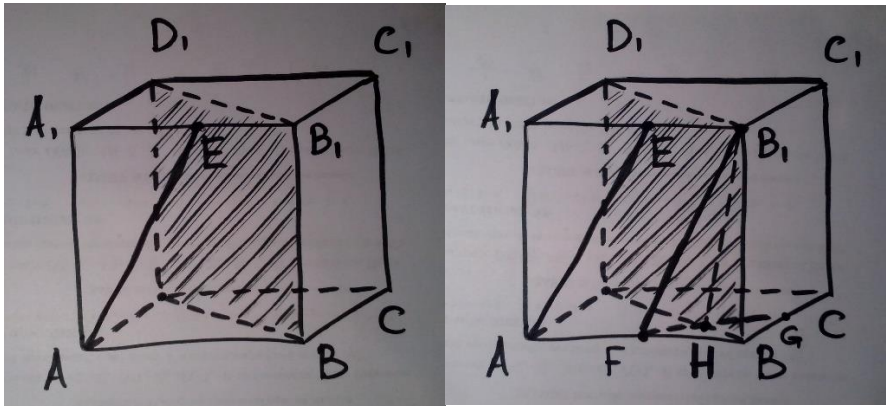
Рисунок с доп. построением:



#### Пример 4.

Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точка  $E$  – середина  $A_1 B_1$ . Найдите синус угла между прямой  $AE$  и плоскостью  $BDD_1$ . (Ответ:  $\frac{\sqrt{10}}{10}$ )

Рисунок с доп. построением:

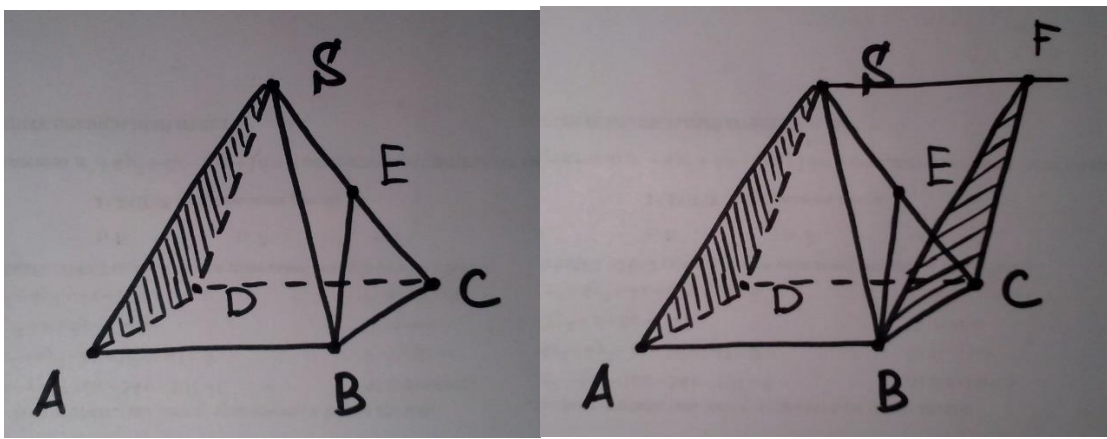


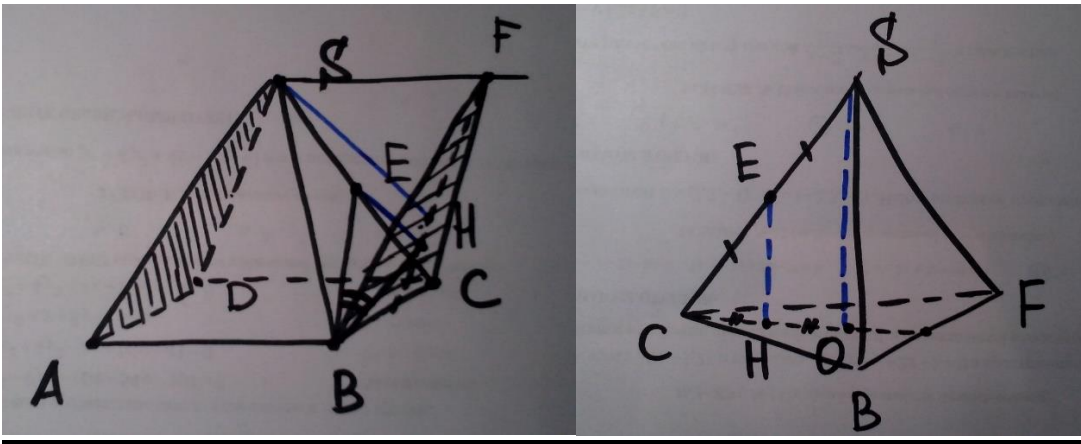
#### Пример 5.

$SABCD$  – правильная 4-х угольная пирамида, все ребра которой равны 1. Точка  $E$  – середина ребра  $SC$ . Найдите угол между прямой  $BE$  и плоскостью  $SAD$ .

(Ответ:  $\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{3})$ )

Рисунок с доп. построением:

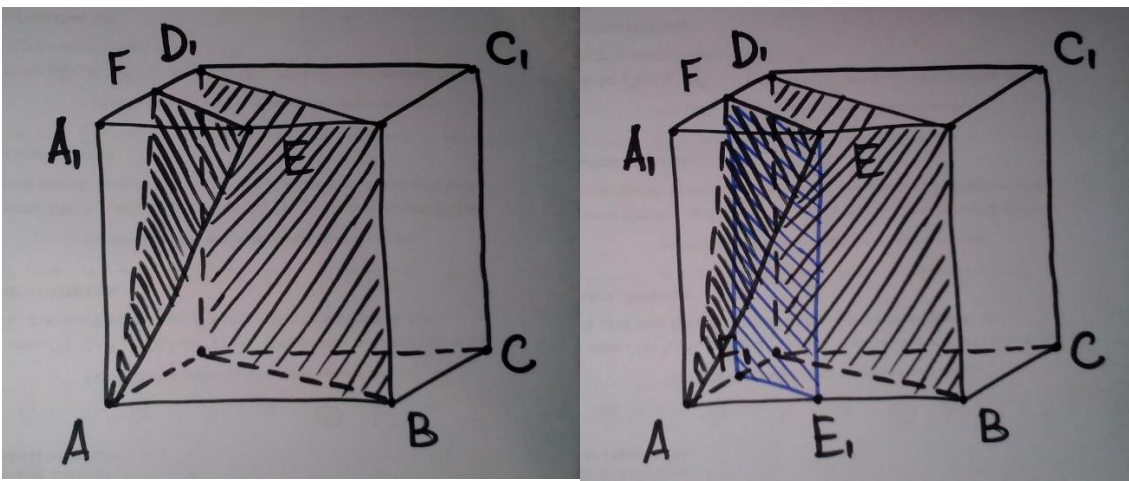




**Пример 6.**

Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точки  $E$  и  $F$  – середины сторон  $A_1 B_1$  и  $A_1 D_1$  соответственно. Найти тангенс угла между плоскостями  $AEF$  и  $BDD_1$ . (Ответ:  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ )

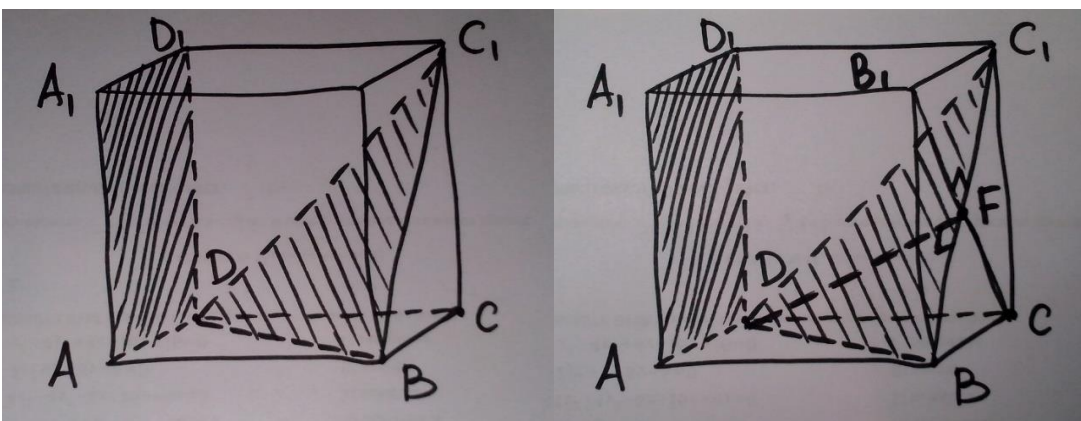
Рисунок с доп. построением:



**Пример 7.**

В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром 1 найти тангенс угла между плоскостями  $ADD_1$  и  $BDC_1$ . (Ответ:  $\sqrt{2}$ )

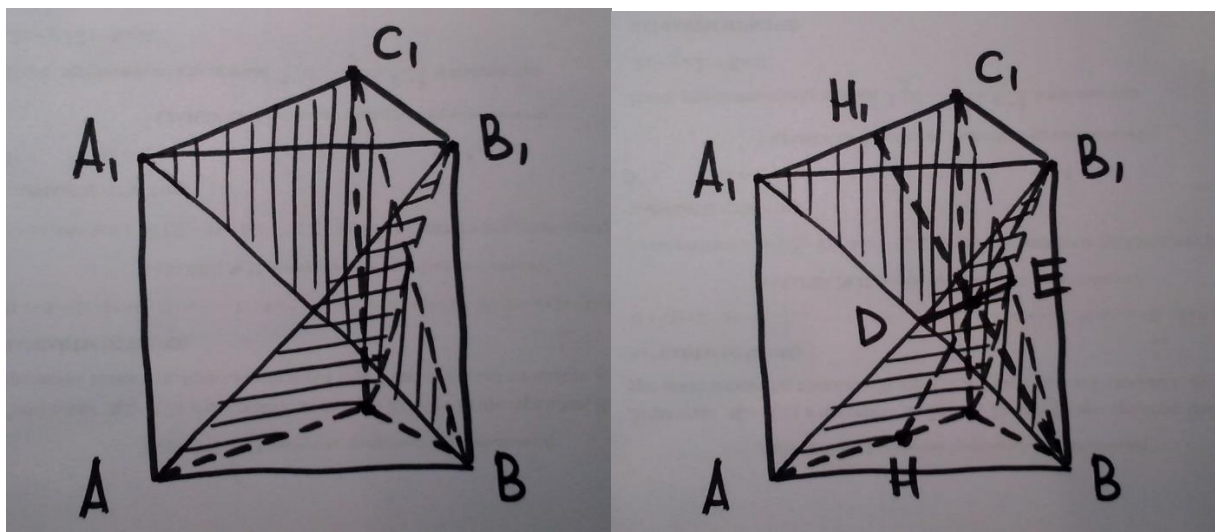
Рисунок с доп. построением:



### Пример 8.

$ABCA_1B_1C_1$  – правильная треугольная призма с ребром 1. Найдите косинус угла между плоскостями  $ACB_1$  и  $BA_1C_1$ . (Ответ:  $1/7$ )

Рисунок с доп. построением:



### Вспомогательные теоремы и свойства:

**Теорема (о 3-х перпендикулярах)** Если проекция наклонной, проведенной к плоскости, перпендикулярна некоторой прямой, лежащей в плоскости, то и сама наклонная перпендикулярна той же прямой.

**Теорема (обратная о 3-х перпендикулярах)** Если наклонная, проведенная к плоскости, перпендикулярна некоторой прямой, лежащей в плоскости, то и проекция наклонной перпендикулярна той же прямой.

**Теорема (признак перпендикулярности прямой и плоскости)** Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся в плоскости прямым, то она перпендикулярна и самой плоскости.

**Свойство прямой, перпендикулярной плоскости** Прямая, перпендикулярная плоскости, перпендикулярна каждой прямой, лежащей в этой плоскости.

**Теорема (признак перпендикулярности плоскостей)** Если одна из плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную второй плоскости, то плоскости перпендикулярны.

**Свойство параллельных плоскостей при пересечении третьей плоскостью.** При пересечении двух параллельных плоскостей третья плоскость высекает на них параллельные прямые.