Некоторые приемы решения задач типа С7(19) ЕГЭ

Белогрудов Александр Николаевич

доцент кафедры специальных глав математики УГАТУ

кандидат физико-математических наук

1. На доске написаны числа 2 и 3. За один ход разрешается заменить написанные на доске пару чисел **a** и **b** парой чисел (2**a**-1) и (**a**+**b**) или парой (2**b**-1) и (**a**+**b**) (например, из чисел 2 и 3 можно получить 3 и 5, либо 5 и 5.
а) Можно ли после нескольких ходов получить на доске число 10?
б) Может ли после 100 ходов на доске получиться число 200?
в) Сделано 2017 ходов, причем ни разу не было пары равных чисел. Какова наименьшая разность двух чисел в паре?

Ответ: а) да, например $(2,3) \to (5,5) \to (9,10)$; б) нет; в) 2.

2. На доске написаны числа 1,2,3, …, 30. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше 35 и отлична от каждой из сумм троек чисел, стертых на предыдущих ходах.
а) Приведите пример последовательности из 5 шагов.
б) Можно ли сделать 10 ходов?
в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?

Ответ: а) вычеркиваем тройки: $(1,10,11), (2,10,12), (3,8,13), (4,7,14), (5,6,15)$; б) нет; в) 6, например, $(1,12,13), (2,11,14), (3,10,15), (4,9,16), (5,8,17), (6,7,18)$.

3. В нескольких одинаковых бочках налито некоторое количество литров воды (необязательно одинаковое). За один раз можно перелить любое количество воды из одной бочки в другую.
а) Пусть есть четыре бочки, в которых 29, 32, 40, 91 литров. Можно ли не более чем за четыре переливания уравнять количество воды в бочках?
б) Пусть есть семь бочек. Всегда ли можно уравнять количество воды во всех бочках не более чем за пять переливаний?
в) За какое наименьшее количество переливаний можно заведомо уравнять количество воды в 26 бочках?

Ответ: а) да, например, за 3 переливания дополнить из большей в меньшие до 48л; б) нет, например, для случая: 1,1,1,1,1,1,8; в) 25 переливаний.

4. На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2970. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на 61).
а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза меньше, чем сумма исходных чисел.
б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5 раз меньше, чем сумма исходных чисел?
в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.

5. Найти решения уравнений:
а) $[2x] = \{7x\}$;
б) $[2x] = 7x$;
в) $2x = \{7x\}$,
где $[x]$ – целая часть числа x, а $\{x\}$ – дробная часть числа.

6. а) Можно ли представить число 2014 в виде суммы двух различных натуральных чисел, имеющих одинаковую сумму цифр?
б) Можно ли представить число 199 в виде суммы двух различных натуральных чисел, имеющих одинаковую сумму цифр?
в) Найти наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел, имеющих одинаковую сумму цифр?

7. В группе одной из социальных сетей состоят одинаковое количество юношей и девушек. Оказалось, что к некоторому моменту времени каждый юноша отправил или 4 или 21 сообщение девушкам, причем и тех, и других юношей было не менее двух и они могли отправлять по нескольку сообщений девушкам.
а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила одинаковое количество сообщений?
б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что у каждой из них одинаковое количество сообщений?
в) Если известно, что все девушки получили разное количество сообщений(возможно, что кто-то не получил сообщений совсем), то каково наибольшее возможное количество девушек в группе?