Белогрудов Александр Николаевич

УГАТУ

доцент кафедры специальных глав математики

Текстовые задачи экономического типа

2017г.

Типы рассматриваемых задач:

- дискретные экономические модели (банковский процент, вклады и кредиты);

- непрерывные модели (оптимизационные задачи).

Ресурсы:

http://alexlarin.net/

http://reshuege.ru/

Задачи на банковский процент. Аннуитентные(равные) платежи.

Пример 1. (Типовые тестовые задания по математике, под ред. И.В. Ященко. 2015 г.) 31 декабря 2014 года Тимофей взял в банке 7 007 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Тимофей переводит в банк платёж. Весь долг Тимофей выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?
Ответ: на 806,4 т.р.

Вспомогательные формулы:

Изменение суммы долга:

Дата	31.01.14	31.01.15	30.01.16	31.01.15	30.01.17
Долг	S	$1{,}2S$	$1{,}2S-P$	$1{,}2(1{,}2S-P)$	$1{,}2(1{,}2S-P)-P$

Дата	31.01.17	30.01.18
Долг	$1{,}2(1{,}2(1{,}2S-P)-P)$	$1{,}2(1{,}2(1{,}2S-P)-P)-P$

Задачи на банковский процент. Дифференцированные платежи.

Пример 2. (демо-вариант для ЕГЭ-2017) 15-го января планируется взять кредит в банке на 1 млн рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

− 1-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;

− со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

− 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

Число, месяц	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн. руб.)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять менее 1,2 млн. руб.

Ответ: 7%.

Вспомогательные формулы:

Дата	15.01	01.02	02.02-14.02	15.02	01.03
Долг	S	$(1+\frac{r}{100})S$		$\frac{6}{10}S$	$(1+\frac{r}{100})\frac{6}{10}S$
Выплата			$\frac{r}{100}S+\frac{4}{10}S$		

Дата	02.03-14.03	15.03	01.04	02.04-14.04	15.04
Долг		$\frac{4}{10}S$	$(1+\frac{r}{100})\frac{4}{10}S$		$\frac{3}{10}S$
Выплата	$\frac{r}{100}\frac{6}{10}S+\frac{2}{10}S$			$\frac{r}{100}\frac{4}{10}S+\frac{1}{10}S$	

Сумма долга: $S,\ \frac{6}{10}S,\ \frac{4}{10}S,\ \frac{3}{10}S,\ \frac{2}{10}S,\ \frac{1}{10}S, 0$

Проценты на долг: $(1+\frac{r}{100})S, (1+\frac{r}{100})\frac{6}{10}S,\ \dots, (1+\frac{r}{100})\frac{1}{10}S$

Выплаты: $(\frac{r}{100}S+\frac{4}{10}S), (\frac{r}{100}\frac{6}{10}S+\frac{2}{10}S),\ \dots, (\frac{r}{100}\frac{1}{10}S+\frac{1}{10}S)$

Задачи на оптимизацию доходов/расходов.

Пример 3. (Задание № 509025, reshuege.ru) Алексей приобрёл ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Ответ: сразу после окончания 7-го года(на 8-м году).

Пример 4. (ЕГЭ-2015) Антон является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производится абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Антон платит рабочему 250 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 200 рублей.

Антон готов выделять 900 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Ответ: 90 ед.

Вспомогательные формулы:

Производные элементарных функций $f'(x)$:
степенная функция: $(x^p)' = px^{p-1}$ показательная функция: $(a^x)' = a^x \ln a$
Правила дифференцирования:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Другие задачи на оптимизацию.

Пример 5. (Задание № 513431, reshuege.ru) Дискретный случай. По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 10 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн. рублей в первый и второй годы, а также целое число m млн. рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m, при которых первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года как минимум утроятся. Для всех возможных вариантов n и m найдите вариант с наименьшей суммой довложений в проект.

Ответ: n=4, m=3.

Пример 6. (Задание № 512381, reshuege.ru) Непрерывный случай. Производство **x** тыс. единиц продукции обходится в $\boldsymbol{q = 0{,}5x^2 + 2x + 5}$ млн рублей в год. При цене $\boldsymbol{p}$ тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $\boldsymbol{px - q}$. При каком наименьшем значении $\boldsymbol{p}$ через четыре года суммарная прибыль составит не менее 52 млн рублей?

Задачи для самостоятельного решения.

Пример 7. (Задание № 509067, reshuege.ru) Дискретный случай. В 1-е классы поступает 43 человека: 23 мальчика и 20 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, а в другом — 21. После распределения посчитали процент мальчиков в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

Ответ: (2 м + 20 д) в первом и (21 м + 1 д) во втором классе.

Пример 8. (ЕГЭ-2015) 15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на **r%** по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите **r**.

Ответ: 3%.

<u>Вспомогательные формулы:</u>

Сумма долга: $S, \frac{18}{19}S, \frac{17}{19}S, \ldots, \frac{2}{19}S, \frac{1}{19}S$

Проценты и долг: $(1+\frac{r}{100})S, (1+\frac{r}{100})\frac{18}{19}S,\ \ldots, (1+\frac{r}{100})\frac{1}{19}S$

Выплаты: $(\frac{r}{100}S+\frac{1}{19}S), (\frac{r}{100}\frac{18}{19}S+\frac{1}{19}S),\ \ldots, (\frac{r}{100}\frac{1}{19}S+\frac{1}{19}S)$